# 第四章　　散熱鰭片

一、散熱鰭片分類

以形狀區分：

　　片狀散熱鰭片

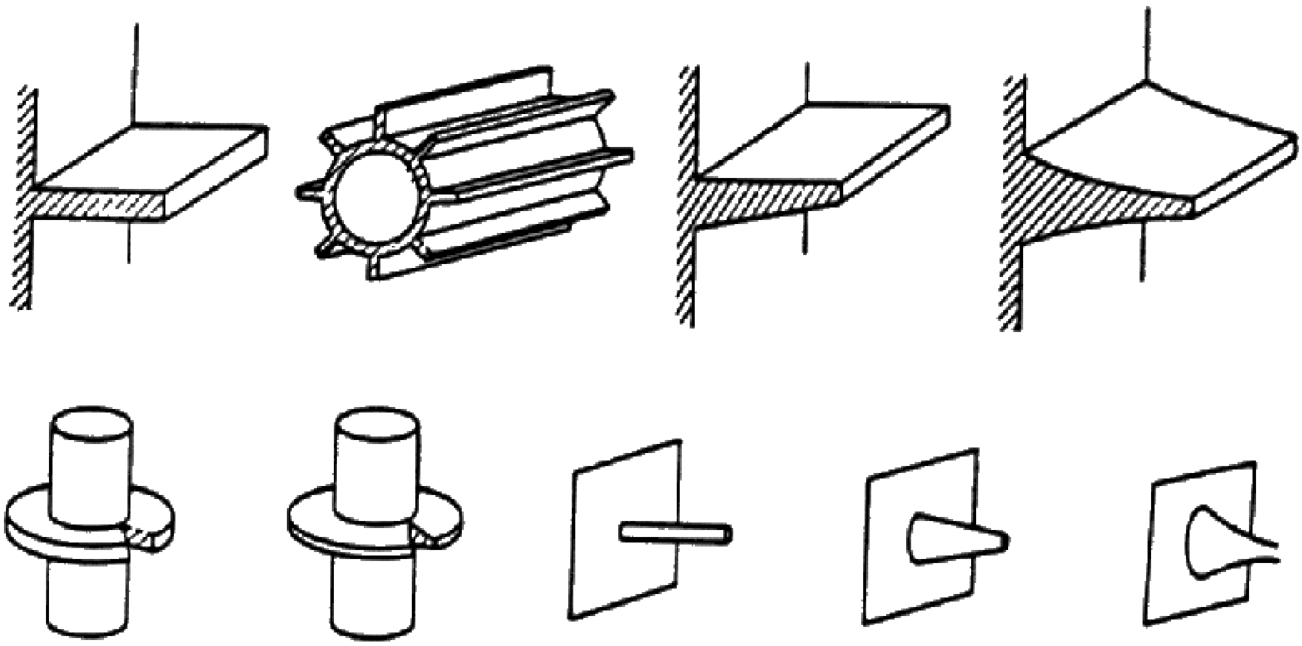
　　柱狀散熱鰭片

　　環狀散熱鰭片

以截面積區分：

　　固定截面積散熱鰭片

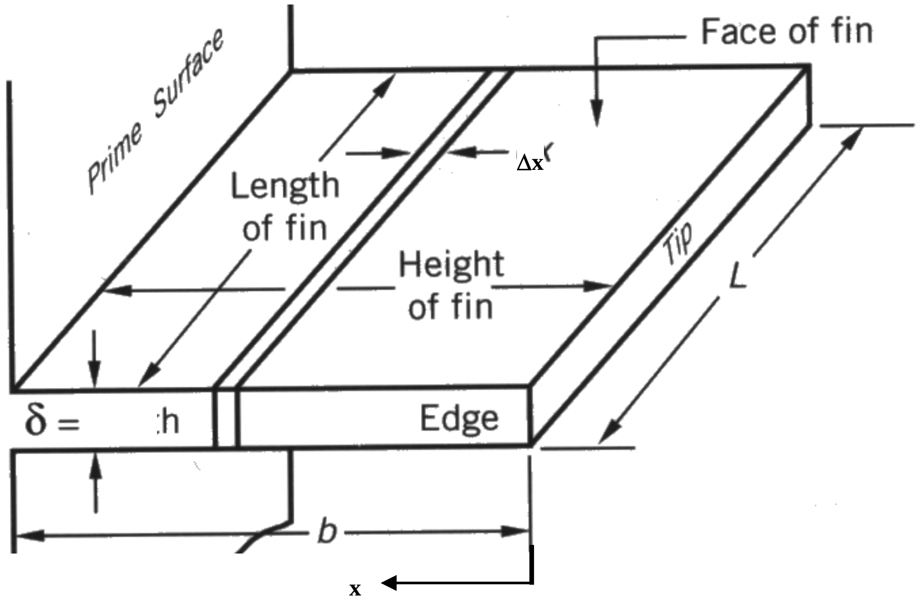
　　變化截面積散熱鰭片



作業 4.1，閱讀參考資料，並寫一份內容摘要。

劉君愷，「散熱片之設計與在電子冷卻技術中之應用」。

二、散熱鰭片性能分析




(一). 無限長度的平板鰭片

$$kA\frac{d^2T}{dx^2} - ph(T - T_a) = 0$$

$A = w\delta$ ， $p = 2(w+\delta) \approx 2w$

$\theta = T - T_a$

$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$ ， $m^2 = \frac{ph}{kA} = \frac{2h}{k\delta}$

該方程式之解爲

$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$

其中 $c_1$ 與 $c_2$ 由邊界條件決定。

無限長度的平板鰭片 $c_1 = 0$

$\theta = c_2 e^{-mx}$

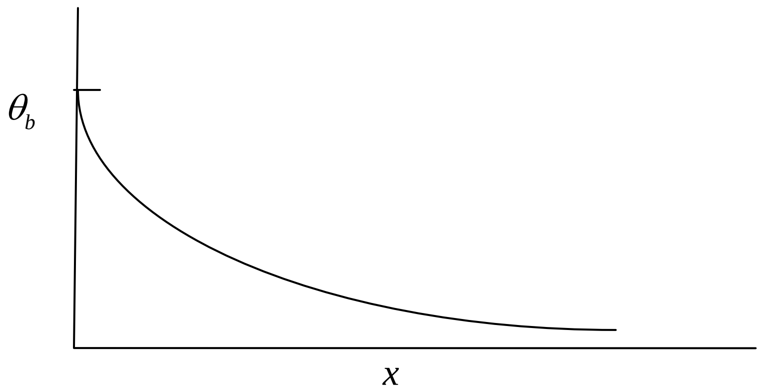
而在鰭片的基部，其溫度爲已知値。

$x = 0$ ， $T = T_b$ ， $\theta = T_b - T_a = \theta_b$

$\theta_b = c_2$

故無限長平板鰭片的溫度分佈爲

$\theta = \theta_b e^{-mx}$




當 $x \to \infty$ 時，$\theta \to 0$，$T \to T_a$

$q'' = -k \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}$，單位面積的熱傳量

$\frac{dT}{dx} = \frac{d\theta}{dx} = -m\theta_b e^{-mx}$

$q'' = -k \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = km\theta_b$

$\dot{q}' = \dot{q}'\delta = \sqrt{2hk\delta}\theta_b$，單位長度的熱傳量

無限長平板鰭片的熱傳量

$\dot{Q}_b = Aq'' = kmw\delta\theta_b$

效益(effectiveness)：有裝的熱傳量與沒有裝的熱傳量的比較

無限長平板鰭片的效益

$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{hA\theta_b}$

效率(efficiency)：真實的熱傳量與理想的熱傳量的比較

無限長平板鰭片的效率

$\eta = \frac{\dot{Q}}{hbp\theta_b}$

$\varepsilon = \dfrac{km}{h} = \sqrt{\dfrac{2k}{h\delta}}$ ，無限長鰭片的效益

若 $\dfrac{2k}{h\delta} < 1$，或 $h > \dfrac{2k}{\delta}$，則散熱鰭片沒有散熱功能。

K = 390 W/m-℃，δ = 1mm，相當於 h > 390000 W/m$^2$-℃，不易發生。

---

$\boxed{\text{例}}$，有一無限長度的鰭片，$T_a$=25℃，$T_b$=100℃，請計算單位寬度的熱傳量與效益。

h=20 W/m$^2$-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm

加強熱傳：熱傳量增加，但效益降低。

h=200 W/m$^2$-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm

更換材料：熱傳量與效益都降低。

h=20 W/m$^2$-℃，k=50 W/m-℃，δ=1mm

增加厚度：熱傳量增加，但效益降低。

h=20 W/m$^2$-℃，k=390 W/m-℃，δ=5mm

---

柱形鰭片的方程式與平板鰭片相同，只是 $m^2$ 的定義不一樣。

方柱形鰭片：$A = b^2$，$p = 4b$，$m^2 = \dfrac{ph}{kA} = \dfrac{4h}{kb}$

圓柱形鰭片：$A = \dfrac{\pi d^2}{4} = \pi r^2$，$p = \pi d$，$m^2 = \dfrac{ph}{kA} = \dfrac{4h}{kd} = \dfrac{2h}{kr}$

---

作業 4.2

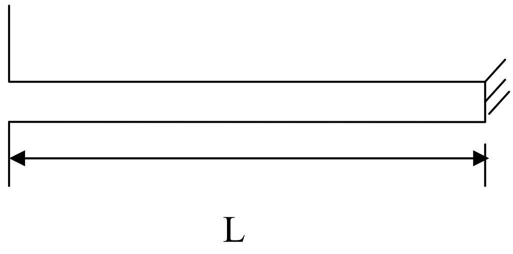
有一圓柱形的無限長鰭片，直徑爲 0.5cm，底座溫度 100℃，熱傳導係數爲 70W/m℃，熱傳係數爲 20 W/m$^2$-℃，外界溫度爲 20℃，請計算熱傳量。

---

(二). 有限長度的平板鰭片

有限長度的平板鰭片有三種不同的邊界條件：絕熱端，對流端，等溫端。

(i). x=L，$\dfrac{dT}{dx}=0$，端點絕熱



$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

$x=0$，$T=T_b$

$$\theta = c_1 + c_2 = \theta_b$$

$x=L$，$\dfrac{d\theta}{dx} = mc_1 e^{mx} - mc_2 e^{-mx} = mc_1 e^{mL} - mc_2 e^{-mL} = 0$

$$c_1 = c_2 e^{-2mL}$$

$$c_1 + c_2 = c_2 e^{-2mL} + c_2 = c_2 (1 + e^{-2mL}) = \theta_b$$

$$c_2 = \frac{\theta_b}{1+e^{-2mL}}$$

$$c_1 = c_2 e^{-2mL} = \frac{e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}} \theta_b$$

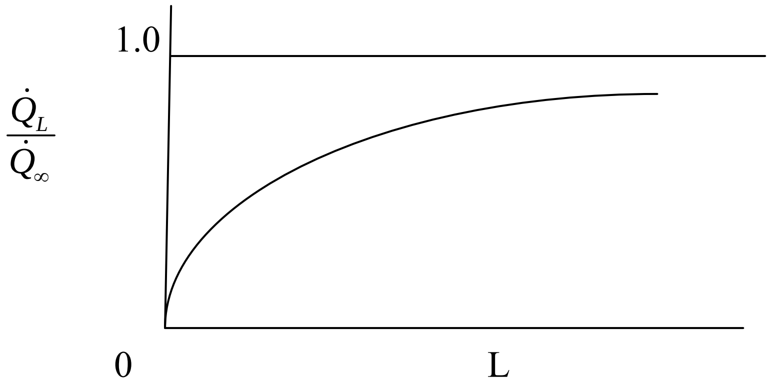
$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{1}{1+e^{-2mL}} (e^{-2mL} e^{mx} + e^{-mx})$$

$\dot{q}'' = -k\dfrac{d\theta}{dx} = km\theta_b \dfrac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$，單位面積的熱傳量

$\dot{Q}_L = w\sqrt{2hk\delta}\,\dfrac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}\theta_b$，總熱傳量

$\dfrac{\dot{Q}_L}{\dot{Q}_\infty} = \dfrac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}} < 1$，與無限翼片總熱傳量之比值

L 越長，熱傳量越大。




基部溫度

$x = L$，

$\frac{\theta_e}{\theta_b} = \frac{2e^{-mL}}{1+e^{-2mL}}$，端點溫度與基部溫度之比值

---

例，有一鰭片，已知 L=10 cm，h=20 W/m$^2$-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，$T_a$=25℃，$T_b$=100℃，請計算單位寬度的熱傳量，端點溫度，與效益。

---

作業 4.3

有一圓柱形的半圓環把手固定在底座上，圓柱的直徑為 0.5cm，而整個圓環的直徑為 20cm。已知底座的溫度為 100℃，把手的熱傳導係數為 70W/m℃，把手與外界的熱傳係數為 20 W/m$^2$-℃，外界的溫度為 20℃，請計算把手的最低溫度。

---

設定熱傳量：

$$\frac{\dot{Q}_L}{\dot{Q}_\infty} = \gamma = \frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$$

$$1-e^{-2mL} = \gamma \cdot \left(1+e^{-2mL}\right)$$

$$1-\gamma=\left(1+\gamma\right)e^{-2mL}$$

$$e^{-2mL}=\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

$$L=\frac{1}{2m}\ln\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)$$

---

$\boxed{\text{例}}$，有一鰭片，已知 h=20 W/m$^2$-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，$T_a$=25℃，$T_b$=100℃，若總熱傳量為無窮長鰭片的 95%，請計算其長度。

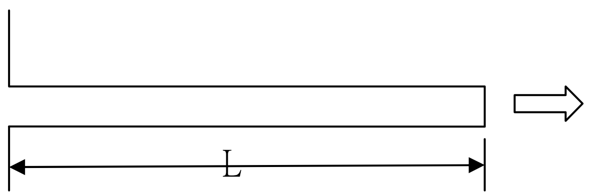
---

作業 4.4

有一端點絕熱方柱翼片，邊長 5mm，h=100 W/m$^2$-℃，k=200 W/m-℃，若其熱傳量為無限長鰭片的 99%，請計算其長度。

---

(ii). x=L, $-kA\dfrac{dT}{dx}=h(T-T_a)$，端點對流熱傳




$$\theta=c_1e^{mx}+c_2e^{-mx}$$

$x=0$，$T=T_b$

$$\theta=c_1+c_2=\theta_b$$

$x=L$，$-k\dfrac{d\theta}{dx}=h\theta$

$$-k(mc_1e^{mL}-mc_2e^{-mL})=h(c_1e^{mL}+c_2e^{-mL})$$

$$c_1(km+h)e^{mL}=c_2e^{-mL}(km-h)$$

$$c_1 = c_2 e^{-2mL}\frac{km-h}{km+h} = c_2 e^{-2mL}\Phi$$

$$\Phi = \frac{km-h}{km+h} = \frac{km/h-1}{km/h+1}$$

$$c_1 + c_2 = c_2 e^{-2mL}\Phi + c_2 = c_2(1+e^{-2mL}\Phi) = \theta_b$$

$$c_2 = \frac{\theta_b}{1+\Phi e^{-2mL}}$$

$$c_1 = \frac{\Phi e^{-2mL}}{1+\Phi e^{-2mL}}\theta_b$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{1}{1+e^{-2mL}}(e^{-2mL}e^{mx}+e^{-mx})$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{1}{1+\Phi e^{-2mL}}(\Phi e^{-2mL}e^{mx}+e^{-mx})$$

$\dot{q}'' = -k\dfrac{d\theta}{dx} = km\theta_b\dfrac{1-\Phi e^{-2mL}}{1+\Phi e^{-2mL}}$ ，單位面積的熱傳量

$\dot{Q}_L = w\sqrt{2hk\delta}\,\dfrac{1-\Phi e^{-2mL}}{1+\Phi e^{-2mL}}\theta_b$ ，總熱傳量

$\dfrac{\dot{Q}_L}{\dot{Q}_\infty} = \dfrac{1-\Phi e^{-2mL}}{1+\Phi e^{-2mL}} < 1$ ，與無限翼片總熱傳量之比值

若 $km>>h$ ，$\Phi \approx 1$ ，則 $\dfrac{\dot{Q}_L}{\dot{Q}_\infty} \approx \dfrac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$ ，與 case 1 相同

$\dfrac{\theta_e}{\theta_b} = \dfrac{e^{-mL}(\Phi+1)}{1+\Phi e^{-2mL}}$ ，端點溫度。

$\dot{q}''_{end} = h\theta_e = h\dfrac{e^{-mL}(\Phi+1)}{1+\Phi e^{-2mL}}\theta_b$ ，端點熱傳量。

---

例，有一端點對流熱傳的平板鰭片，已知 L=10 cm，h=20 W/$m^2$-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，$T_a$=25℃，$T_b$=100℃，請計算單位寬度的熱傳量，端點溫度，端點熱傳量，與效益。

---

設定熱傳量：

$$\frac{\dot{Q}_L}{\dot{Q}_\infty}=\gamma \text{，} 1-\Phi e^{-2mL}=\gamma\cdot\left(1+\Phi e^{-2mL}\right)$$

$$1-\gamma=\Phi\left(1+\gamma\right)e^{-2mL} \text{，} e^{-2mL}=\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\Phi$$

$$L=\frac{1}{2m}\ln\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\cdot\frac{1}{\Phi}\right)$$

---

例，有一端點對流熱傳的平板鰭片，已知 h=20 W/m$^2$-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，$T_a$=25℃，$T_b$=100℃，若總熱傳量爲無窮長鰭片的 95%，請計算其長度。

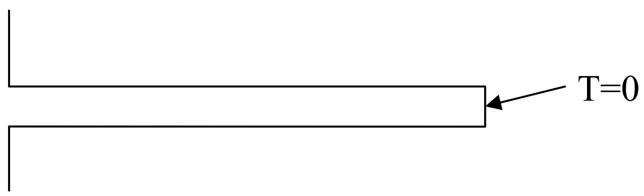
---

作業 4.5

有一圓柱鰭片，直徑 5mm，h=100 W/m$^2$-℃，k=200 W/m-℃，若其熱傳量爲無限長鰭片的 99%，請計算其長度。

---

(iii). x=L，T=$T_a$，端點溫度爲零




$$\theta=c_1e^{mx}+c_2e^{-mx}$$

$$x=0 \text{，} T=T_b$$

$$\theta=c_1+c_2=\theta_b$$

$$x=L \text{，} \theta=c_1e^{mL}+c_2e^{-mL}=0$$

$$c_1 = -c_2 e^{-2mL}$$

$$c_1 + c_2 = c_2(1 - e^{-2mL}) = \theta_b$$

$$c_2 = \frac{\theta_b}{1 - e^{-2mL}}$$

$$c_1 = -\frac{e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}}\theta_b$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{1}{1 - e^{-2mL}}(-e^{-2mL}e^{mx} + e^{-mx})$$

$$\dot{q}'' = -k\frac{d\theta}{dx} = km\theta_b\frac{1 + e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}} > km\theta_b$$ ，單位面積的熱傳量

$$\dot{Q}_L = k\delta wm\theta_b\frac{e^{2mL} + 1}{e^{2mL} - 1} = \dot{Q}_\infty\frac{1 + e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}}$$ ，總熱傳量

$$\frac{\dot{Q}_L}{\dot{Q}_\infty} = \frac{1 + e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}} > 1$$ ，與無限翼片總熱傳量之比值

L 越短，熱傳量越大。這已不是散熱翼片，從端面傳走的熱量高於上下兩面傳走的熱量。

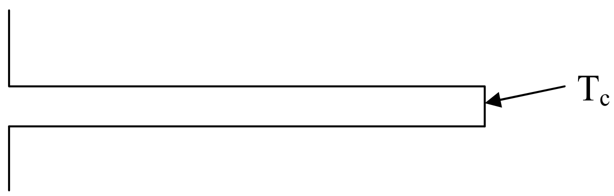
$$\dot{q}''_{end} = -k\frac{d\theta}{dx} = km\theta_b\frac{2e^{-mL}}{1 - e^{-2mL}}$$ ，端點熱傳量。

---

例，有一端點溫度爲零的平板鰭片，已知 L=10 cm，h=20 W/m$^2$-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，$T_a$=25℃，$T_b$=100℃，請計算單位寬度的熱傳量，端點熱傳量，與效益。

---

(vi). x=L, T=$T_c$，端點溫度爲設定值



$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$

$x = 0$ ，$T = T_b$

$\theta = c_1 + c_2 = \theta_b$

$x = L$ ，$\theta = c_1 e^{mL} + c_2 e^{-mL} = \theta_c$

$c_1 = -c_2 e^{-2mL} + \theta_c e^{-mL}$

$c_1 + c_2 = c_2(1 - e^{-2mL}) + \theta_c e^{-mL} = \theta_b$

$$c_2 = \frac{\theta_b - \theta_c e^{-mL}}{1 - e^{-2mL}}$$

$$c_1 = \theta_b - c_2 = \frac{-\theta_b e^{-2mL} + \theta_c e^{-mL}}{1 - e^{-2mL}}$$

$$\theta = \frac{1}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[\left(\theta_c - \theta_b e^{-mL}\right)e^{mx} + \left(\theta_b e^{mL} - \theta_c\right)e^{-mx}\right]$$

$$\dot{q}'' = -k\frac{m}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[\left(\theta_c - \theta_b e^{-mL}\right)e^{mx} - \left(\theta_b e^{mL} - \theta_c\right)e^{-mx}\right]$$

x=0, $\dot{q}_b'' = \dfrac{km}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[\theta_b\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) - 2\theta_c\right] = km\left[\theta_b\dfrac{1 + e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}} - \dfrac{2\theta_c e^{-mL}}{1 - e^{-2mL}}\right]$

$\dot{Q}_b = \dfrac{kmwb}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[\theta_b\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) - 2\theta_c\right]$，總熱傳量

x=L, $\dot{q}_c'' = \dfrac{km}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[2\theta_b - \theta_c\left(e^{mL} + e^{-mL}\right)\right] = km\left[\dfrac{2\theta_b e^{-mL}}{1 - e^{-2mL}} - \theta_c\dfrac{1 + e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}}\right]$

$\dot{Q}_c = \dfrac{kmwb}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[2\theta_b - \theta_c\left(e^{mL} + e^{-mL}\right)\right]$，端點熱傳量

當 $\theta_c = 0$ 時，$\dot{Q}_b = \dfrac{e^{mL} + e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} kmwb$ ，(iii)與(iv)相同。

---

$\boxed{例}$，有一平板鰭片，已知 L=10 cm，h=20 W/$m^2$-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，

$T_a$=25℃，$T_b$=100℃，$T_e$=50℃，請計算單位寬度的熱傳量，端點熱傳量，與效益。

-----------------------------------------------------------------------------------------

四種邊界的單位寬度熱傳量，尖端溫度，與尖端熱傳量

| | 熱傳量 $(q_b''/km\theta_b)$ | 端點溫度 $(\theta_e/\theta_b)$ | 端點熱傳 $q_e''/km\theta_b$ |
|---|---|---|---|
| 端點絕熱 | $\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$ | $\frac{2e^{-mL}}{1+e^{-2mL}}$ | 0 |
| 端點對流 | $\frac{1-\Phi e^{-2mL}}{1+\Phi e^{-2mL}}$ | $\frac{e^{-mL}(\Phi+1)}{1+\Phi e^{-2mL}}$ | $h\theta_b\frac{e^{-mL}(\Phi+1)}{1+\Phi e^{-2mL}}$ |
| 端點零溫 | $\frac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}$ | 0 | $\frac{2e^{-mL}}{1-e^{-2mL}}$ |
| 端點定溫 | $\frac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}-\frac{\theta_c}{\theta_b}\frac{2e^{-mL}}{1-e^{-2mL}}$ | $\frac{\theta_c}{\theta_b}$ | $\frac{2e^{-mL}}{1-e^{-2mL}}-\frac{\theta_c}{\theta_b}\frac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}$ |

-----------------------------------------------------------------------------------------

作業 4.6

有限長度的鰭片，請計算四種邊界的單位寬度熱傳量與尖端溫度。

$T_a$=25℃，$T_b$=100℃，h=200 W/m$^2$-℃，k=50 W/m-℃，δ=1mm，L=3cm

(1). 絕熱

(2). 對流

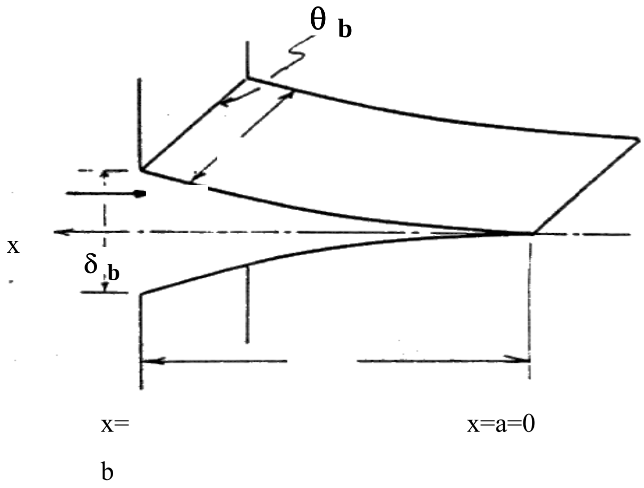
(3). $T_e$=25℃

(4). $T_e$=50℃

-----------------------------------------------------------------------------------------

## (三). 其他形狀的鰭片

### (3.1). 拋物線形鰭片




鰭片的截面積爲 $A = bW(\frac{x}{L})^2$

注意：坐標原點在拋物線尖端，而坐標方向爲由尖端向基部。

$$\frac{d}{dx}(kbW(\frac{x}{L})^2\frac{dT}{dx}) - ph(T - T_a) = 0$$

$$p = 2(W + bW(\frac{x}{L})^2) \approx 2W$$

$$\frac{d}{dx}(x^2\frac{d\theta}{dx}) - \frac{2hL^2}{kb}\theta = 0 \text{ ， } m^2 = \frac{2h}{kb}$$

$$x^2\frac{d^2\theta}{dx^2} + 2x\frac{d\theta}{dx} - m^2L^2\theta = 0$$

$$\theta = x^s$$

$$s(s-1) + 2s - (mL)^2 = 0$$

$$\theta = c_1x^{s_1} + c_2x^{s_2}$$

$$s_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2L^2}}{2} \text{ ， } s_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2L^2}}{2}$$

其中 $s_1 > 0$ ， $s_2 < 0$

因在 $x = 0$(尖端處)，$\theta$ 爲有限值，而 $x^{s_2} \to \infty$ ，故 $c_2 = 0$

在 $x=L$ (基部)， $\theta=\theta_b$ ，故 $c_1=\dfrac{\theta_b}{L^{S_1}}$

$$\frac{\theta}{\theta_b}=(\frac{x}{L})^{S1}$$

$$q''=k\frac{d\theta}{dx}_{x=L}=k\theta_b\frac{S_1}{L}=\frac{k\theta_b}{L}\frac{\sqrt{1+4m^2L^2}-1}{2}$$

注意：坐標原點在拋物線尖端，熱傳方向與坐標方向相反。

$$q''=km\theta_b\frac{\sqrt{1+(2mL)^2}-1}{2mL}$$

$$\dot{Q}=\frac{kbw\theta_b}{L}\frac{\sqrt{1+4m^2L^2}-1}{2}$$

非固定截面積鰭片的熱傳量較低，但可減少材料使用，降低重量。

$$M_{parabolic}=\int_0^L\rho b\left(\frac{x}{L}\right)^2wdx=\frac{1}{3}\rho bwL=\frac{1}{3}M_{plate}$$

拋物線形鰭片的重量只有平板狀鰭片的 1/3

$$\frac{q''_{parabolic}}{q''_{plate}}=\frac{\sqrt{1+\left(2mL\right)^2}-1}{2mL}\cdot\frac{1+\dfrac{km-h}{km+h}e^{-2mL}}{1-\dfrac{km-h}{km+h}e^{-2mL}}$$

若 $km>>h$ ， $\dfrac{km-h}{km+h}\approx 1$

$$\frac{q''_{parabolic}}{q''_{plate}}=\frac{\sqrt{1+\left(2mL\right)^2}-1}{2mL}\cdot\frac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}$$

---

$\boxed{\text{例}}$，請計算拋物線形，矩形的熱傳量與溫度分佈。

h=20 W/m$^2$-℃ ，k=200 W/m-℃ ，b=3mm，L=1cm， $\theta_b$= 100℃

h=200 W/m$^2$-℃ ，k=50 W/m-℃ ，δ=3mm，L=3cm， $\theta_b$= 100℃

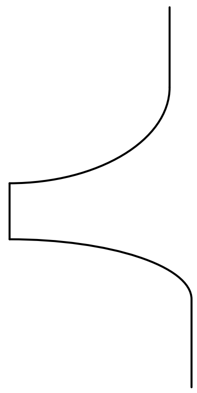
---

作業 4.7

有一平板鰭片，已知 L=10 cm，h=20 W/m$^2$-℃，k=200 W/m-℃，δ=1mm，$T_a$=25℃，$T_b$=100℃，請設計一拋物線形鰭片，具有相同的熱傳量。若二者的寬度與基部厚度相同，計算拋物線形鰭片的長度，並比較二者的重量。

---

半截的拋物線形鰭片



$$\theta = c_1 x^{s_1} + c_2 x^{s_2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = c_1 s_1 x^{s_1 - 1} + c_2 s_2 x^{s_2 - 1}$$

$x = L_1$ (前端處)，$\dfrac{d\theta}{dx} = 0$ ，

$$c_1 s_1 (L_1)^{s_1 - 1} + c_2 s_2 (L_1)^{s_2 - 1} = 0$$

$$c_1 = -c_2 \frac{s_2 (L_1)^{s_2 - 1}}{s_1 (L_1)^{s_1 - 1}}$$

$x = L$ (基部)，$\theta = \theta_b$

$$\theta_b = c_1 L^{s_1} + c_2 L^{s_2} = -c_2 \frac{s_2 (L_1)^{s_2 - 1}}{s_1 (L_1)^{s_1 - 1}} L^{s_1} + c_2 L^{s_2} = c_2 \left( L^{s_2} - \frac{s_2}{s_1} (L_1)^{s_2 - s_1} L^{s_1} \right)$$

$$c_2 = \frac{\theta_b}{L^{s_2}\left(1 - \frac{s_2}{s_1}(\frac{L_1}{L})^{s_2 - s_1}\right)}$$

$$c_1 = -\frac{\theta_b}{L^{s_2}\left(1 - \frac{s_2}{s_1}(\frac{L_1}{L})^{s_2 - s_1}\right)}\frac{s_2}{s_1}(L_1)^{s_2 - s_1}$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{1}{\left(1 - \frac{s_2}{s_1}(\frac{L_1}{L})^{s_2 - s_1}\right)}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^{s_2} - \frac{s_2}{s_1}\left(\frac{x}{L}\right)^{s_1}\left(\frac{L_1}{L}\right)^{S_2 - S_1}\right]$$

$$q'' = -k\frac{d\theta}{dx}_{x=L} = -\frac{k\theta_b}{L}\frac{s_2}{\left(1 - \frac{s_2}{s_1}(\frac{L_1}{L})^{s_2 - s_1}\right)}\left[1 - \left(\frac{L_1}{L}\right)^{s_2 - s_1}\right]$$

$$\dot{Q} = -\frac{kbw\theta_b}{L}\frac{\sqrt{1 + 4m^2L^2} - 1}{2}\frac{1 - \left(\frac{L_1}{L}\right)^{s_2 - s_1}}{\left(1 - \frac{s_2}{s_1}(\frac{L_1}{L})^{s_2 - s_1}\right)}$$

---

例，請計算半截式拋物線形鰭片的熱傳量與溫度分佈。

h=20 W/$m^2$-℃ ，k=200 W/m-℃ ，b=3mm，L=1cm，$L_1$=0.8cm， $\theta_b$= 100℃

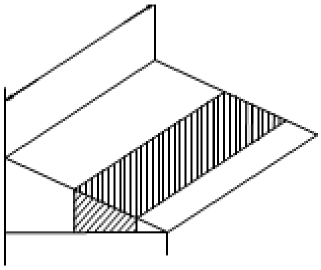
---

作業 4.8

有一拋物線形鰭片，已知 h=20 W/$m^2$-℃，k=200 W/m-℃，b=3mm，L=1cm，$\theta_b$= 100℃ ，若改爲半截式拋物線形鰭片，二者的寬度，基部厚度，及總長度都相同，請比較二者的熱傳量及重量。

---

(3.2). 三角形鰭片



鰭片的截面積爲 $A = bW\dfrac{x}{L}$

注意：坐標原點在拋物線尖端，而坐標方向爲由尖端向基部。

$$\frac{d}{dx}(kbW\frac{x}{L}\frac{dT}{dx}) - ph(T - T_a) = 0$$

$$p = 2(W + b\frac{x}{L}) \approx 2W$$

$$\frac{d}{dx}(x\frac{d\theta}{dx}) - \frac{2hL}{kb}\theta = 0 \text{，} m^2 = \frac{2h}{kb}$$

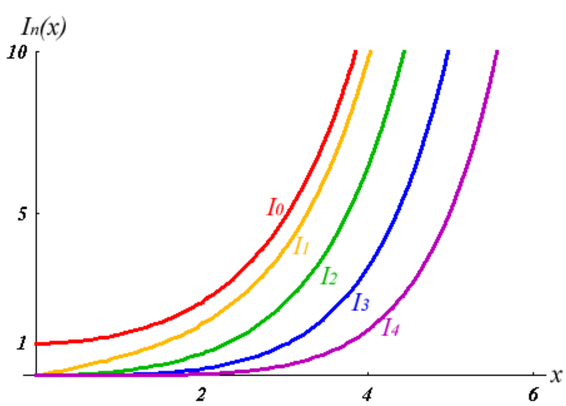
$$x\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} - m^2L\theta = 0$$

該方程式的解為

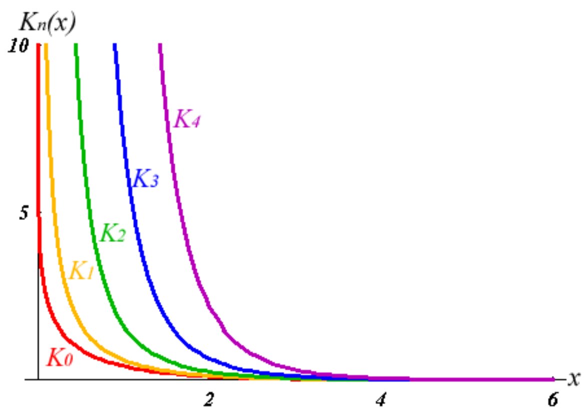
$$\theta = c_1 I_0(2m\sqrt{Lx}) + c_2 K_0(2m\sqrt{Lx})$$

其中 $I_0(2m\sqrt{Lx})$ 與 $K_0(2m\sqrt{Lx})$ 爲 第零階的 Modified Bessel's function

Modified Bessel's function 的函數圖形如下：




$I_n(x)$ 的變化




$K_n(x)$ 的變化

| x | $K_0(x)$ |
|---|---|
| 0 | ∞ |
| 0.1 | 2.427069025 |
| 0.2 | 1.752703856 |
| 0.3 | 1.372460061 |
| 0.4 | 1.114529135 |
| 0.5 | 0.924419071 |
| 0.6 | 0.777522092 |
| 0.7 | 0.66051986 |
| 0.8 | 0.5653471053 |
| 0.9 | 0.4867303082 |
| 1 | 0.4210244382 |
| 1.1 | 0.3656023915 |
| 1.2 | 0.3185082203 |
| 1.3 | 0.2782476463 |
| 1.4 | 0.2436550612 |
| 1.5 | 0.2138055626 |
| 1.6 | 0.187954752 |
| 1.7 | 0.1654963181 |
| 1.8 | 0.1459314005 |
| 1.9 | 0.1288459793 |
| 2 | 0.1138938727 |
| 2.1 | 0.1007837409 |
| 2.2 | 0.0892690057 |
| 2.3 | 0.079139933 |
| 2.4 | 0.0702173415 |
| 2.5 | 0.0623475532 |
| 2.6 | 0.05539830329 |
| 2.7 | 0.04925540092 |
| 2.8 | 0.04381998198 |
| 2.9 | 0.03900623457 |
| 3 | 0.03473950439 |
| 3.1 | 0.03095470804 |
| 3.2 | 0.02759499768 |
| 3.3 | 0.02461063215 |
| 3.4 | 0.02195801881 |
| 3.5 | 0.01959889717 |
| 3.6 | 0.01749964102 |
| 3.7 | 0.01563065992 |
| 3.8 | 0.01396588453 |
| 3.9 | 0.01248232276 |
| 4 | 0.01115967609 |
| 4.1 | 0.009980007228 |
| 4.2 | 0.008927451542 |
| 4.3 | 0.007987966032 |
| 4.4 | 0.007149110623 |
| 4.5 | 0.006399857243 |
| 4.6 | 0.005730422917 |
| 4.7 | 0.005132123648 |
| 4.8 | 0.004597246317 |
| 4.9 | 0.004118936236 |

| x | $K_1(x)$ |
|---|---|
| 0 | ∞ |
| 0.1 | 9.853844781 |
| 0.2 | 4.775972543 |
| 0.3 | 3.055992033 |
| 0.4 | 2.184354425 |
| 0.5 | 1.65644112 |
| 0.6 | 1.30283494 |
| 0.7 | 1.050283535 |
| 0.8 | 0.8617816345 |
| 0.9 | 0.7165335788 |
| 1 | 0.6019072302 |
| 1.1 | 0.5097600272 |
| 1.2 | 0.4345923911 |
| 1.3 | 0.3725474956 |
| 1.4 | 0.3208359022 |
| 1.5 | 0.2773878005 |
| 1.6 | 0.2406339114 |
| 1.7 | 0.2093624882 |
| 1.8 | 0.1826230998 |
| 1.9 | 0.159660153 |
| 2 | 0.1398658818 |
| 2.1 | 0.1227464115 |
| 2.2 | 0.1078968101 |
| 2.3 | 0.0949824438 |
| 2.4 | 0.0837248388 |
| 2.5 | 0.0738908163 |
| 2.6 | 0.06528404506 |
| 2.7 | 0.05773839896 |
| 2.8 | 0.05111268561 |
| 2.9 | 0.0452864233 |
| 3 | 0.04015643113 |
| 3.1 | 0.03563405495 |
| 3.2 | 0.03164289521 |
| 3.3 | 0.02811693427 |
| 3.4 | 0.02499898412 |
| 3.5 | 0.02223939293 |
| 3.6 | 0.01979496202 |
| 3.7 | 0.0176280351 |
| 3.8 | 0.01570572908 |
| 3.9 | 0.01399928208 |
| 4 | 0.01248349889 |
| 4.1 | 0.01113627763 |
| 4.2 | 0.009938204736 |
| 4.3 | 0.008872207189 |
| 4.4 | 0.007923253361 |
| 4.5 | 0.007078094909 |
| 4.6 | 0.006325043644 |
| 4.7 | 0.00565377824 |
| 4.8 | 0.005055176444 |
| 4.9 | 0.004521169177 |

| x | $I_0(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0.1 | 1.002501563 |
| 0.2 | 1.010025028 |
| 0.3 | 1.022626879 |
| 0.4 | 1.040401782 |
| 0.5 | 1.063483371 |
| 0.6 | 1.092045364 |
| 0.7 | 1.126303018 |
| 0.8 | 1.166514923 |
| 0.9 | 1.212985166 |
| 1 | 1.266065878 |
| 1.1 | 1.326160184 |
| 1.2 | 1.393725584 |
| 1.3 | 1.469277798 |
| 1.4 | 1.5533951 |
| 1.5 | 1.64672319 |
| 1.6 | 1.74998064 |
| 1.7 | 1.863964962 |
| 1.8 | 1.989559357 |
| 1.9 | 2.127740194 |
| 2 | 2.279585302 |
| 2.1 | 2.44628313 |
| 2.2 | 2.629142864 |
| 2.3 | 2.8296056 |
| 2.4 | 3.049256658 |
| 2.5 | 3.289839144 |
| 2.6 | 3.553268904 |
| 2.7 | 3.841650977 |
| 2.8 | 4.157297704 |
| 2.9 | 4.502748661 |
| 3 | 4.88079259 |
| 3.1 | 5.29449149 |
| 3.2 | 5.747207187 |
| 3.3 | 6.242630465 |
| 3.4 | 6.78481316 |
| 3.5 | 7.37820343 |
| 3.6 | 8.027684547 |
| 3.7 | 8.738617524 |
| 3.8 | 9.51688803 |
| 3.9 | 10.36895792 |
| 4 | 11.30192195 |
| 4.1 | 12.32357012 |
| 4.2 | 13.44245616 |
| 4.3 | 14.66797299 |
| 4.4 | 16.01043552 |
| 4.5 | 17.48117186 |
| 4.6 | 19.09262348 |
| 4.7 | 20.85845553 |
| 4.8 | 22.79367799 |
| 4.9 | 24.91477908 |

| x | $I_1(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0.1 | 0.05006252605 |
| 0.2 | 0.100500834 |
| 0.3 | 0.15169384 |
| 0.4 | 0.2040267557 |
| 0.5 | 0.2578943054 |
| 0.6 | 0.3137040256 |
| 0.7 | 0.3718796778 |
| 0.8 | 0.4328648026 |
| 0.9 | 0.4971264482 |
| 1 | 0.565159104 |
| 1.1 | 0.637488876 |
| 1.2 | 0.7146779416 |
| 1.3 | 0.797329315 |
| 1.4 | 0.8860919814 |
| 1.5 | 0.9816664286 |
| 1.6 | 1.084810635 |
| 1.7 | 1.196346566 |
| 1.8 | 1.31716723 |
| 1.9 | 1.448244373 |
| 2 | 1.590636855 |
| 2.1 | 1.745499809 |
| 2.2 | 1.914094651 |
| 2.3 | 2.097800028 |
| 2.4 | 2.298123813 |
| 2.5 | 2.516716245 |
| 2.6 | 2.755384341 |
| 2.7 | 3.016107693 |
| 2.8 | 3.301055823 |
| 2.9 | 3.612607212 |
| 3 | 3.953370217 |
| 3.1 | 4.326206027 |
| 3.2 | 4.73425389 |
| 3.3 | 5.180958855 |
| 3.4 | 5.67010219 |
| 3.5 | 6.205834922 |
| 3.6 | 6.792714601 |
| 3.7 | 7.435745797 |
| 3.8 | 8.14042458 |
| 3.9 | 8.912787451 |
| 4 | 9.759465154 |
| 4.1 | 10.68774184 |
| 4.2 | 11.70562014 |
| 4.3 | 12.8218928 |
| 4.4 | 14.04622134 |
| 4.5 | 15.38922275 |
| 4.6 | 16.86256476 |
| 4.7 | 18.47907065 |
| 4.8 | 20.2528346 |
| 4.9 | 22.19934862 |

$x=0$ ，$\theta$為有限值，但$K_0(0)\to\infty$ ，故$c_2=0$

$$\theta=c_1 I_0(2m\sqrt{Lx})$$

$x=L$ ，$\theta=\theta_b$ ，$c_1=\dfrac{\theta_b}{I_0(2mL)}$

$$\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{I_0(2m\sqrt{Lx})}{I_0(2mL)}$$

$$\frac{dI_0(x)}{dx}=I_1(x)$$

$$q''=k\frac{d\theta}{dx}_{x=L}=k\frac{d\theta}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=k2m\sqrt{L}\frac{1}{2}\frac{\theta_b}{\sqrt{x}}\frac{I_1(2m\sqrt{Lx})}{I_0(2mL)}=km\theta_b\frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

$$\dot{Q}=bWq''=\sqrt{\frac{2kh}{b}}\theta_b\frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

$$\varepsilon=\frac{q''}{h\theta_b}=\frac{km}{h}\frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

---

例，請計三角形鰭片的熱傳量與溫度分佈。

h=20 W/m$^2$-℃ ，k=200 W/m-℃ ，b=3mm，L=1cm，$\theta_b$= 100℃

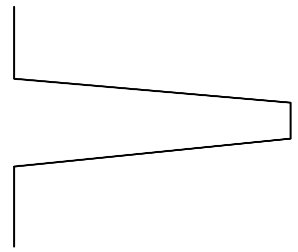
---

作業 4.9

有一平板鰭片，已知 L=10 cm，h=20 W/m$^2$-℃ ，k=200 W/m-℃ ，δ=1mm，$T_a$=25℃ ，$T_b$=100℃，請設計一三角形鰭片，具有相同的熱傳量。若二者的寬度與基部厚度相同，計算三角形鰭片的長度，並比較二者的重量。

---

半截的三角形鰭片(去除尖端)



$$\theta = c_1 I_0(2m\sqrt{Lx}) + c_2 K_0(2m\sqrt{Lx})$$

$$\frac{d\theta}{dx} = c_1 m \frac{1}{\sqrt{x}} I_1(2m\sqrt{x}) - c_2 m \frac{1}{\sqrt{x}} K_1(2m\sqrt{x})$$

$x = L_1$ ， $\frac{d\theta}{dx} = c_1 m \frac{1}{\sqrt{L_1}} I_1(2m\sqrt{L_1}) - c_2 m \frac{1}{\sqrt{L_1}} K_1(2m\sqrt{L_1}) = 0$

$$c_1 = c_2 \frac{K_1(2m\sqrt{L_1})}{I_1(2m\sqrt{L_1})}$$

$x = L$ ， $\theta = \theta_b = c_2 \frac{K_1(2m\sqrt{L_1})}{I_1(2m\sqrt{L_1})} I_0(2m\sqrt{L}) + c_2 K_0(2m\sqrt{L})$ ，

$$c_2 = \frac{\theta_b}{\frac{K_1(2m\sqrt{L_1})}{I_1(2m\sqrt{L_1})} I_0(2m\sqrt{L}) + K_0(2m\sqrt{L})}$$

$$c_1 = \frac{\theta_b}{\frac{K_1(2m\sqrt{L_1})}{I_1(2m\sqrt{L_1})} I_0(2m\sqrt{L}) + K_0(2m\sqrt{L})} \frac{K_1(2m\sqrt{L_1})}{I_1(2m\sqrt{L_1})}$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\frac{K_1(2m\sqrt{L_1})}{I_1(2m\sqrt{L_1})} I_0(2m\sqrt{x}) + K_0(2m\sqrt{x})}{\frac{K_1(2m\sqrt{L_1})}{I_1(2m\sqrt{L_1})} I_0(2m\sqrt{L}) + K_0(2m\sqrt{L})}$$

$$q'' = -k\frac{d\theta}{dx}_{x=L} = -km\frac{\theta_b}{\sqrt{L}}\frac{\dfrac{K_1(2m\sqrt{L_1})}{I_1(2m\sqrt{L_1})}I_1(2m\sqrt{L}) - K_1(2m\sqrt{L})}{\dfrac{K_1(2m\sqrt{L_1})}{I_1(2m\sqrt{L_1})}I_0(2m\sqrt{L}) + K_0(2m\sqrt{L})}$$

------------------------------------------------------------------------------------------------

例，請計半截式三角形鰭片的熱傳量與溫度分佈。

h=20 W/$m^2$-℃，k=200 W/m-℃，b=3mm，L=1cm，$L_1$=0.8cm，$\theta_b$= 100℃

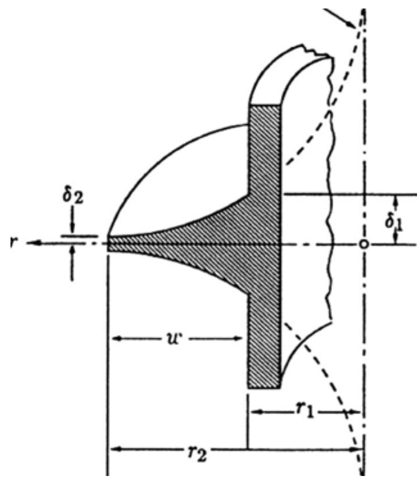
------------------------------------------------------------------------------------------------

作業 4.10

有一三角形鰭片，已知 h=20 W/$m^2$-℃，k=200 W/m-℃，b=3mm，L=1cm，$\theta_b$= 100℃，若改爲半截式三角形鰭片，二者的寬度，基部厚度，及總長度都相同，請比較二者的熱傳量及重量。

------------------------------------------------------------------------------------------------

## (3.3). 環形鰭片


$$\frac{d}{dr}(A\frac{dT}{dr}) - \frac{ph}{k}\theta = 0$$

$A = 2\pi r\delta$， $p \approx 4\pi r$

$$\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr}) - \frac{2hr}{k\delta}\theta = 0$$

$$m^2 = \frac{2h}{k\delta}$$

該方程式之解爲

$$\theta = c_1 I_0(mr) + c_2 K_0(mr)$$

其中$I_0(mr)$與$K_0(mr)$爲 第零階的 Modified Bessel's function

(3.3.1). 無限大的環形翼片

$r \to \infty$ ， $\theta = 0$ ， $c_1 = 0$

$r = r_i$ ， $\theta = \theta_b$ ， $\theta_b = c_2 K_0(mr_i)$

$$c_2 = \frac{\theta_b}{K_0(mr_i)}$$

$$\theta = \theta_b \frac{K_0(mr)}{K_0(mr_i)}$$

$$\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x) \text{ ， } \frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x)$$

$$\dot{Q}_\infty = -2\pi r_i k \left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r=r_0} = 2\pi r_i k m \theta_b \frac{K_1(mr_i)}{K_0(mr_i)}$$

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_\infty}{2\pi r_i h \theta_b} = \frac{km}{h} \frac{K_1(mr_i)}{K_0(mr_i)}$$

---

例，請計算無限大環形鰭片的熱傳量與溫度分佈。

h=20 W/$m^2$-℃ ，k=390 W/m-℃ ，δ=1mm，$r_0$=1cm， $\theta_b$= 100℃

m=10.127，$mr_0$=0.1013， $K_0(mr_0) = 2.4143$， $K_1(mr_0) = 9.7243$

$\dot{Q}_\infty = 99982$ W， $\varepsilon$ =795

h=200 W/$m^2$-℃ ，k=50 W/m-℃ ，δ=1mm，$r_0$=3cm， $\theta_b$= 100℃

m=89.443，$mr_0$=2.6833， $K_0(mr_0) = 0.0502$， $K_1(mr_0) = 0.0589$

$\dot{Q}_\infty = 771483$ W， $\varepsilon$ =205

---

(3.3.2). 有限半徑的環形鰭片(假設邊緣絕熱)

$r = r_i$ ， $\theta_b = c_1 I_0(mr_i) + c_2 K_0(mr_i)$

$r = r_o$ ， $\dfrac{d\theta}{dr} = c_1 m I_1(mr_o) - c_2 m K_1(mr_o) = 0$ ， $c_1 = \dfrac{K_1(mr_o)}{I_1(mr_o)} c_2$

其中 $I_1(mr)$ 與 $K_1(mr)$ 爲 第一階的 Modified Bessel's function

$$\theta_b = \left[ \frac{K_1(mr_o)}{I_1(mr_o)} I_0(mr_i) + K_0(mr_i) \right] c_2$$

$$c_2 = \frac{I_1(mr_o)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o) + K_0(mr_i)I_1(mr_o)} \theta_b$$

$$c_1 = \frac{K_1(mr_o)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o) + K_0(mr_i)I_1(mr_o)} \theta_b$$

$$\theta = \frac{K_1(mr_o)I_0(mr) + I_1(mr_o)K_0(mr)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o) + K_0(mr_i)I_1(mr_o)} \theta_b$$

$$\dot{Q} = -2\pi r_i k m \theta_b \frac{-K_1(mr_o)I_1(mr_i) + I_1(mr_o)K_1(mr_i)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o) + K_0(mr_i)I_1(mr_o)} = \alpha \dot{Q}_\infty$$

$\alpha = \dfrac{\dot{Q}}{\dot{Q}_\infty}$ 為實際熱傳與無窮大環熱傳之比值。

$$\alpha = \frac{K_0(mr_i)}{K_1(mr_i)} \cdot \frac{I_1(mr_o)K_1(mr_i) - K_1(mr_o)I_1(mr_i)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o) + K_0(mr_i)I_1(mr_o)}$$

$$= \frac{I_1(mr_o) - K_1(mr_o)\dfrac{I_1(mr_i)}{K_1(mr_i)}}{I_1(mr_o) + K_1(mr_o)\dfrac{I_0(mr_i)}{K_0(mr_i)}}$$

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{2\pi r_i h \theta_b} = \frac{km}{h} \frac{I_1(mr_o)K_1(mr_i) - K_1(mr_o)I_1(mr_i)}{I_1(mr_o)K_0(mr_i) + K_1(mr_o)I_0(mr_i)}$$

Area ratio $\quad AR = \dfrac{2\pi\left(r_o^2 - r_i^2\right)}{2\pi r_i \delta} = \dfrac{r_o^2 - r_i^2}{r_i \delta}$

$K_0$ ， $K_1$ ， $I_0$ ， $I_1$ 等函數的數值請參考附件。

---

$\boxed{例}$，請計算有限半徑環形鰭片的熱傳量與溫度分佈。

h=20 W/$m^2$-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，$r_0$=1cm，$r_1$=10cm，$\theta_b$= 100℃

m=10.127，$mr_0$=0.1013，$mr_1$=1.0127

$K_0(mr_0)=2.4143$，$K_1(mr_0)=9.7243$，$I_0(mr_0)=1.0026$，$I_1(mr_0)=0.0507$

$K_0(mr_1)=0.4135$，$K_1(mr_1)=0.5891$，$I_0(mr_1)=1.2733$，$I_1(mr_1)=0.5741$

$\alpha$=0.6974，$\dot{Q}=69729$ W，$\varepsilon$=555，AR = 990

---

$\boxed{例}$，請計算計算 $r_o$，使$\varepsilon=50$。

h=20 W/$m^2$-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，$r_0$=1cm，$\theta_b$= 100℃

---

$\boxed{作業 4.11}$

請計算計算 $r_o$，使$\alpha=0.9$。

h=20 W/$m^2$-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，$r_0$=1cm，$\theta_b$= 100℃

---

$\boxed{例}$，有一金屬圓棒，k=390 W/m-℃，直徑 2 cm，長度 50 cm，中間有三個等間隔的環型鰭片，外徑 20 cm，厚度 2 mm，若金屬棒內部有一均勻熱源，功率爲 70 W，已知金屬棒表面的熱傳系數爲 20 W/$m^2$-℃，大氣溫度爲 25℃，請計算金屬棒表面溫度。

---

$\boxed{作業 4.12}$

有一銅管，內徑 1.8 cm，外徑 2 cm，長度 1 m，中間有十個等間隔的環型鰭片，外徑 20 cm，厚度 2 mm，若銅管入口爲 80℃的熱水，流速 0.5 m/s，已知銅管內壁的熱傳系數爲 200 W/$m^2$-℃，銅管表面的熱傳系數爲 20 W/$m^2$-℃，大氣溫度爲 25℃，請計算流出銅管的水溫。

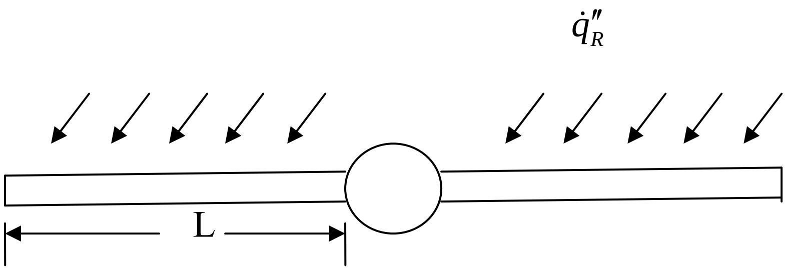
---

各種鰭片的比較

| | 熱通量 $\dot{q}''$ (W/m$^2$) | 端點溫度 |
|---|---|---|
| 無窮大板狀鰭片 | $km\theta_b$ | 0 |
| 板狀鰭片 | $km\theta_b\dfrac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$ | $\dfrac{\theta_e}{\theta_b}=\dfrac{2e^{-mL}}{1+e^{-2mL}}$ |
| 拋物線鰭片 | $km\theta_b\dfrac{\sqrt{1+(2mL)^2}-1}{2mL}$ | 0 |
| 三角形鰭片 | $km\theta_b\dfrac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$ | $\dfrac{\theta_e}{\theta_b}=\dfrac{1}{I_0(2mL)}$ |
| 無窮大環形鰭片 | $km\theta_b\dfrac{K_1(mr_0)}{K_0(mr_0)}$ | 0 |
| 環形鰭片 | $km\theta_b\dfrac{-K_1(mr_o)I_1(mr_i)+I_1(mr_o)K_1(mr_i)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o)+K_0(mr_i)I_1(mr_o)}$ | $\dfrac{K_1(mr_o)I_0(mr_o)+I_1(mr_o)K_0(mr_o)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o)+K_0(mr_i)I_1(mr_o)}$ |

(四). 太陽能熱水器

太陽能熱水器的吸熱板受到陽光照射，同時向四周的環境散熱，而中間流道的水管也會帶走一部份的熱量。


$$kA\frac{d^2T}{dx^2} - ph(T - T_a) + \dot{q}''_R p = 0$$

吸收板只有單面吸熱，單面散熱。另一面以絕熱材料包覆。

$A = w\delta$ ， $p = w$

$\theta = T - T_a$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{h}{k\delta}\theta + \frac{\dot{q}''_R}{k\delta} = 0$$

$$m^2 = \frac{h}{k\delta}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta + \frac{\dot{q}''_R}{k\delta} = 0$$

$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} + \frac{\dot{q}''_R}{h}$$

$\theta_R = \dfrac{\dot{q}''_R}{h}$：日照平衡溫度，在固定日照強度下，吸收板的最高溫度。

x=0, $\theta = \theta_b$

x=L, $\dfrac{dT}{dx} = 0$，絕熱端

$$\theta = (\theta_b - \theta_R)\frac{1}{1+e^{-2mL}}(e^{-2mL}e^{mx} + e^{-mx}) + \theta_R$$

$$\dot{q}' = k\delta m(\theta_b - \theta_R)\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$$

$\theta_b < \theta_R$ 是太陽能吸收板能吸熱的必要條件。當 $\theta_b = \theta_R$時，已無淨熱傳量，此爲太陽能吸收板所能達到的最高溫度。

管內水溫變化爲


$$\dot{m}_f c_f \frac{dT_f}{dx} = 2\pi R_f h_f (T_b - T_f)$$

$$2\pi R_f h_f (T_b - T_f) = 2\dot{q}' = -2k\delta m(\theta_b - \theta_R)\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$$

$$(2\pi R_f h_f + 2k\delta m\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}})T_b = 2\pi R_f h_f T_f + 2k\delta m(T_a + \theta_R)\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$$

$$T_b = \frac{\pi R_f h_f}{\pi R_f h_f + k\delta m\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}}T_f + \frac{k\delta m\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}}{\pi R_f h_f + k\delta m\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}}(T_a + \theta_R)$$

$$\frac{dT_f}{dx}=\frac{2\pi R_f h_f}{\dot{m}_f c_f}\frac{k\delta m\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}}{\pi R_f h_f+k\delta m\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}}[-T_f+(T_a+\theta_R)]$$

$$\frac{d\theta_f}{dx}+\frac{\theta_f}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\frac{\dot{q}_R''}{2h}\ ,\ \frac{1}{\lambda}=\frac{2\pi R_f h_f}{\dot{m}_f c_f}\frac{k\delta m\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}}{\pi R_f h_f+k\delta m\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}}$$

$$x=0,\ \theta_f=\theta_{f0}$$

$$\theta_f=(\theta_{f0}-\theta_R)e^{-\frac{x}{\lambda}}+\theta_R$$

$$x=w,\ \theta_{fL}=(\theta_{f0}-\theta_R)e^{-\frac{w}{\lambda}}+\theta_R$$

$$\theta_{fL}-\theta_{f0}=(\theta_R-\theta_{f0})(1-e^{-\frac{w}{\lambda}})$$

$$\dot{Q}_f=\dot{m}_f c_f(\theta_{fL}-\theta_{f0})=\dot{m}_f c_f(\theta_R-\theta_{f0})(1-e^{-\frac{w}{\lambda}})$$

$$\dot{Q}_R=\dot{q}_R''2wL$$

$$\eta=\frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_R}=\frac{\dot{m}_f c_f}{\dot{q}_R''2wL}(\theta_R-\theta_{f0})(1-e^{-\frac{w}{\lambda}})=\frac{\dot{m}_f c_f}{2hwL}(1-\frac{\theta_{f0}}{\theta_R})(1-e^{-\frac{w}{\lambda}})$$

---

例，台中地區夏天日照強度爲 700 W/m$^2$。請計算太陽能吸收板所能達到的最高溫度。

k=200 W/m-℃ ，δ=1mm，h = 30 W/m$^2$-℃ ，Ta = 30℃ ，L=2 cm，w=2m

d=0.5cm，u=0.5 m/sec

---

熱水統的加熱過程

$$M_f c_f\frac{d\theta}{dt}=\dot{m}_f c_f(\theta_{fL}-\theta_{f0})$$

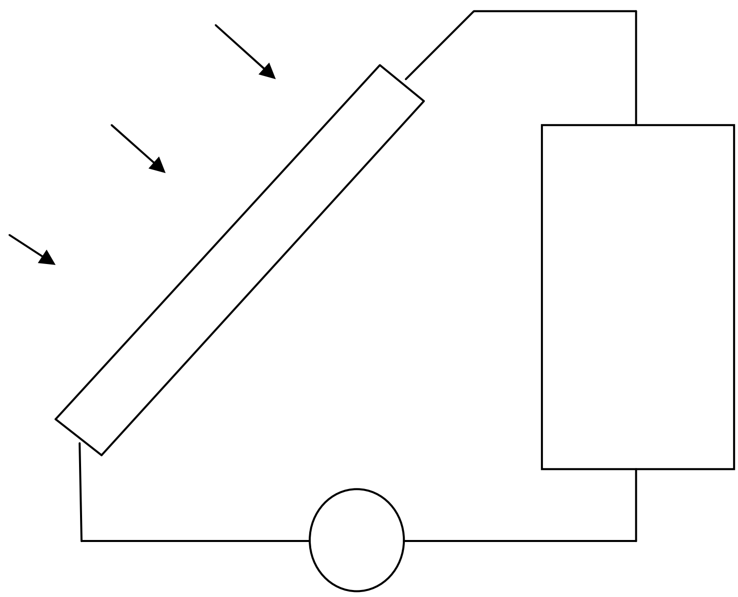
$$\theta=\theta_{f0}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\dot{m}_f}{M_f}(\theta_R-\theta)(1-e^{-\frac{w}{\lambda}})=\frac{1}{\tau_f}(\theta_R-\theta)$$

$$\frac{1}{\tau_f}=\frac{\dot{m}_f}{M_f}(1-e^{-\frac{w}{\lambda}})$$

$$\frac{d\theta}{dt}+\frac{1}{\tau_f}(\theta-\theta_R)=0$$

$$\frac{\theta-\theta_R}{\theta_0-\theta_R}=e^{-\frac{t}{\tau_f}}$$



---

例，台中地區夏天日照強度爲 700 W/m$^2$。請計算太陽能吸收板所能達到的最高溫度。

k=200 W/m-℃，δ=1mm，h = 30 W/m$^2$-℃，Ta = 30℃，L=2 cm，w=2m

d=0.5cm，u=0.5 m/sec

---

例，有一太陽能吸收板，共有 10 片吸收片。儲水桶內有 100L 的冷水，水溫 30℃。水泵流量 10L/min，請計算一小時後水溫。

------------------------------------------------------------------------------------------

作業 4.13

台中市夏天的日照強度與大氣溫度如下表所示，，請計算上題的系統從上午八點開始，到下午四點時，儲水桶內的水溫。

| | 日照強度 | 大氣溫度 | | 日照強度 | 大氣溫度 |
|---|---|---|---|---|---|
| 8:00~9:00 | 400 W/m$^2$ | 27℃ | 12:00~13:00 | 1000 W/m$^2$ | 35℃ |
| 9:00~10:00 | 600 W/m$^2$ | 29℃ | 13:00~14:00 | 900 W/m$^2$ | 35℃ |
| 10:00~11:00 | 800 W/m$^2$ | 31℃ | 14:00~15:00 | 700 W/m$^2$ | 33℃ |
| 11:00~12:00 | 1000 W/m$^2$ | 33℃ | 15:00~16:00 | 500 W/m$^2$ | 31℃ |

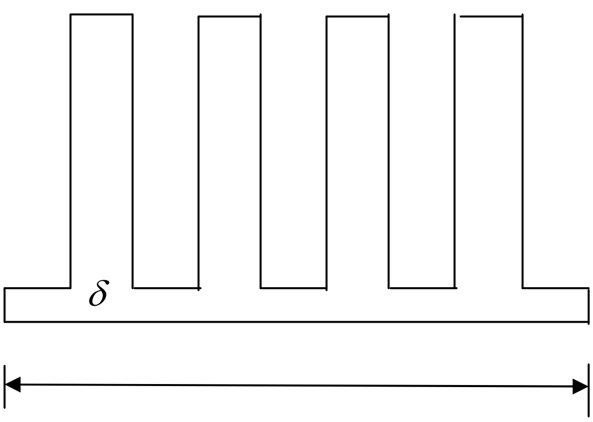
------------------------------------------------------------------------------------------

(五). 散熱鰭片模組設計

單一散熱鰭片的效果有限，必須以模組方式來散熱，才能有效控制溫度。



(5.1). 外平板翼片



$L$

單片的效益：

$$\varepsilon = \lambda \cdot \frac{1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} e^{-2ml}}{1 + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} e^{-2ml}} \text{ ， } \lambda = \frac{km}{h} = \frac{k}{h} \cdot \sqrt{\frac{2h}{kb}}$$

整體的效益：

$$\varepsilon_{eff} = \frac{L - n\delta + n\delta\varepsilon}{L} = 1 + \frac{n\delta(\varepsilon - 1)}{L} = 1 + f(\varepsilon - 1)$$

其中 $L$ ：整片鰭片基座長度

$n$ ：鰭片數

$\delta$ ：單一鰭片厚度

$f = \frac{n\delta}{L}$ ：鰭片覆蓋的面積比例

單片的效益很高，但整體的效益就不一定很高。

整個散熱模組的熱傳量

$$\dot{q}'' = \frac{T_{\max} - T_a}{R}$$

$$R = \sum \frac{\delta_i}{k_i} + \frac{1}{h\varepsilon_{eff}}$$

$$T_{\max} = T_a + \dot{q}'' \cdot \left[ \sum \frac{\delta_i}{k_i} + \frac{1}{h\varepsilon_{eff}} \right]$$

---

例、散熱鰭片規格如下：

底部面積 $A_b$= 4cm×4cm，形式: plate type

厚度 b= 1 mm，長度 L= 2 cm，寬度 w= 4 cm，間距 s= 3 mm，

數目 n= 10，k= 200 W/m-K，風速 u= 1 m/sec，大氣溫度 Ta = 25℃

$d_h = 2s$ : hydraulic diameter

$$Gz = \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr} \cdot \frac{d_h}{L}, \text{ Graetz number}$$

$$Nu = 7.54 + \frac{0.0289 \cdot Gz^{1.37}}{1 + 0.0438 \cdot Gz^{0.87}} = \frac{hd_h}{k}$$

(1). 請計算散熱鰭片的熱傳係數 h

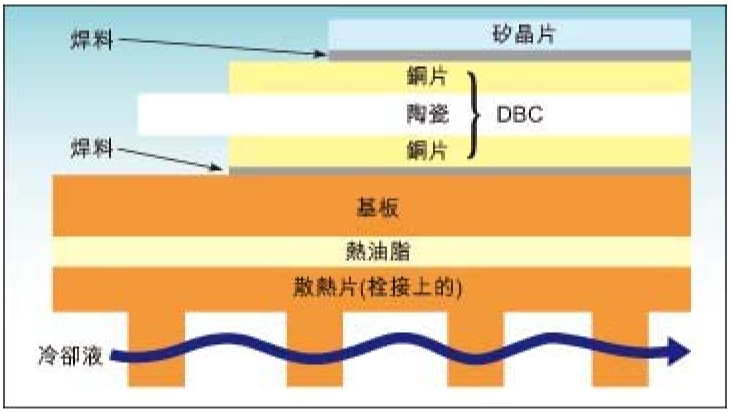
(2). 請計算單一散熱鰭片的效益 $\varepsilon_f$

(3). 請計算整個散熱鰭片組的效益

(4). 若散熱鰭片需散熱 20W，請計算散熱鰭片底部溫度。

---

例，有一 20 W 的晶片，長寬均爲 4 cm，安裝在上述的鰭片座上。已知晶片內部如下圖所示。




鋁板：k=200 W/m-℃ ，δ=5 mm

銅板：k=390 W/m-℃ ，δ=1 mm

陶瓷：k=5 W/m-℃ ，δ=1 mm

膠模：k=3 W/m-℃ ，δ=5 mm

請計算晶片內部最高溫度。

---

例，有一具氣冷式的機車引擎，以鑄鐵鰭片散熱。已知氣缸直徑 8 cm，高

度 15 cm，氣缸外壁共有 10 片散熱鰭片，每片直徑 20 cm，高度 5 cm，厚度 5 mm。引擎的發熱功率為 4 kW，機車速度為 50 km/hr，請計算氣缸內壁溫度。大氣溫度 Ta = 25℃。

-----------------------------------------------------------------------------------------------

例，有一圓管，內徑 5cm，外徑 6cm，長度 10m，在內壁上沿著軸向共鑲有 16 片板狀鰭片，每一片厚度 2mm，長度 10m，高度 1cm。入口為 100℃的熱空氣，流速 1 m/sec，管外為 25℃的冷水垂直流過，流速 0.1 m/sec，請計算出口空氣溫度。

-----------------------------------------------------------------------------------------------

作業 4.14

有一 5cm×5cm 的平面熱源，發熱量為 50W，擬用柱狀鰭片來散熱。共有 7×7 排圓柱，每一圓柱直徑 5mm，高度 3cm。已知 k=200 W/m-℃，風速 u= 1 m/sec，大氣溫度為 25℃。圓柱的熱傳系數

$$Nu = C\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{Re}_x^n$$

| Re | C | n |
|---|---|---|
| 0.4~4 | 0.989 | 0.330 |
| 4~40 | 0.911 | 0.385 |
| 40~4000 | 0.683 | 0.466 |
| 4000~40000 | 0.193 | 0.618 |
| 40000~400000 | 0.0266 | 0.805 |

-----------------------------------------------------------------------------------------------

作業 4.15

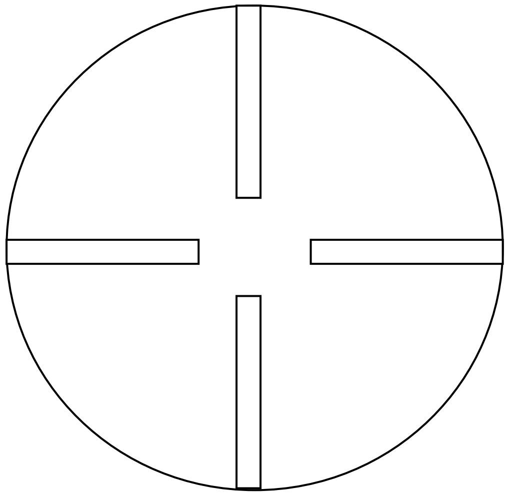
有一 5cm×5cm 的平面熱源，發熱量為 50W，擬用板狀鰭片來散熱。共有 7 片平板，每一片厚度 2mm，寬度 5cm，長度 3cm。已知 k=200 W/m-℃，風速 u= 1 m/sec，平板與大氣之間的熱傳系數為

$$Nu = 7.54 + \frac{0.0289 \cdot Gz^{1.37}}{1 + 0.0438 \cdot Gz^{0.87}} = \frac{hd_h}{k}$$

大氣溫度為 25℃。請計算平面熱源的表面溫度。

---------------------------------------------------------------------------------------------------

(5.2). 內平板鰭片



單片的效益：

$$\varepsilon = \lambda \cdot \frac{1 - \dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1} e^{-2ml}}{1 + \dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1} e^{-2ml}} \text{ ， } \lambda = \frac{km}{h} = \frac{k}{h} \cdot \sqrt{\frac{2h}{kb}}$$

整體的效益：

$$\varepsilon_i = \frac{2\pi r - nb + nb\varepsilon}{2\pi r} = 1 + \frac{nb(\varepsilon - 1)}{2\pi r} = 1 + f(\varepsilon - 1)$$

$$\dot{m}c \frac{dT}{dx} = hp\varepsilon_i (T_w - T)$$

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{hp\varepsilon_i}{\dot{m}c}\theta = 0 \text{ ， } \theta = T - T_w$$

$$\theta = \theta_i e^{-\frac{x}{\lambda}\varepsilon_i}$$

$$\theta_e = \theta_i e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}$$

$$\dot{Q} = \dot{m}c(T_e - T_i) = \dot{m}c(T_w - T_i)\left(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}\right)$$

---

$\boxed{例}$，有一個空氣冷卻器，內徑 5 cm，長度 1m，內部有 8 片銅製平板鰭片，厚度 1mm，高度 2cm，已知 $h_i$=200 W/m-℃，入口空氣溫度 200℃，速度 5 m/sec，管壁外徑 5.6 cm，以 25℃的水冷卻，$h_o$=50 W/m-℃，請計算出口溫度。

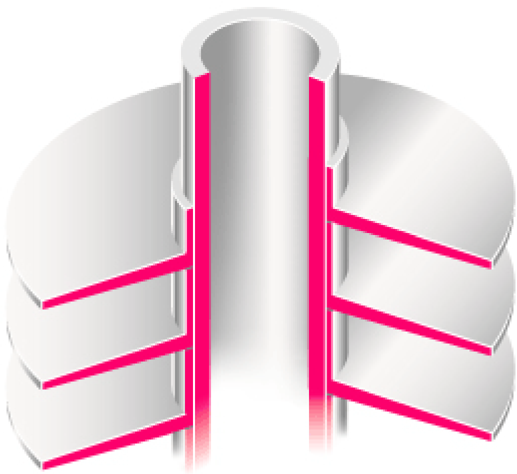
---

**作業 4.16**

有一個空氣冷卻器，內徑 5 cm，長度 1m，內部有 16 片銅製平板鰭片，厚度 1mm，高度 2cm，已知 $h_i$=200 W/m-℃，入口空氣溫度 200℃，速度 5 m/sec，管壁外徑 5.6 cm，以 25℃的水冷卻，$h_o$=50 W/m-℃，請計算出口溫度。

---

(5.3). 外環狀鰭片



單片的效益：

$$\varepsilon = \frac{km}{h}\frac{I_1(mr_1)K_1(mr_0) - K_1(mr_1)I_1(mr_0)}{I_1(mr_1)K_0(mr_0) + K_1(mr_1)I_0(mr_0)}$$

整體的效益：

$$\varepsilon_o = \frac{L - n\delta + n\delta\varepsilon}{L} = 1 + \frac{n\delta(\varepsilon - 1)}{L} = 1 + f(\varepsilon - 1)$$

$$\dot{Q} = h_o A_o \varepsilon_o \left(T_o - T_w\right) \text{，} \quad A_o = L 2\pi r_1$$

內平板外環狀翼片空氣冷卻管

$$\dot{Q} = \dot{m}c(T_w - T_i)\left(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}\right) = h_o A_o \varepsilon_o \left(T_o - T_w\right)$$

$$T_w\left[\dot{m}c\left(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}\right) + h_o A_o \varepsilon_o\right] = \dot{m}cT_i\left(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}\right) + h_o A_o \varepsilon_o T_o$$

$$T_w = \frac{\dot{m}cT_i(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}) + h_o A_o \varepsilon_o T_o}{\dot{m}c(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}) + h_o A_o \varepsilon_o}$$

$$\dot{Q} = \frac{h_o A_o \varepsilon_o \dot{m}c_i(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i})}{\dot{m}c(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}) + h_o A_o \varepsilon_o}(T_o - T_i) = \frac{T_o - T_i}{R}$$

$$R = \frac{\dot{m}c(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}) + h_o A_o \varepsilon_o}{h_o A_o \varepsilon_o \dot{m}c_i(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i})} = \frac{1}{h_o A_o \varepsilon_o} + \frac{1}{\dot{m}c_i(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i})}$$

---

例，有一個空氣冷卻器，內徑 5 cm，長度 1m，內部有 8 片銅製平板鰭片，厚度 1mm，高度 2cm，已知 $h_i$=200 W/m-℃，入口空氣溫度 200℃，速度 5 m/sec，管壁外徑 5.6 cm，上面共有以 10 片銅製環狀鰭片，厚度 2mm，高度 5cm，今以 25℃的水冷卻，$h_o$=50 W/m-℃，請計算出口溫度。

---

作業 4.17

有一個空氣冷卻器，內徑 5 cm，長度 2m，內部有 16 片銅製平板鰭片，厚度 1mm，高度 2cm，已知 $h_i$=200 W/m-℃，入口空氣溫度 200℃，速度 5 m/sec，管壁外徑 5.6 cm，上面共有以 40 片銅製環狀鰭片，厚度 2mm，高度 5cm，今以 25℃的水冷卻，$h_o$=50 W/m-℃，請計算出口溫度。

---

(六). 級聯鰭片組(cascade fin array)



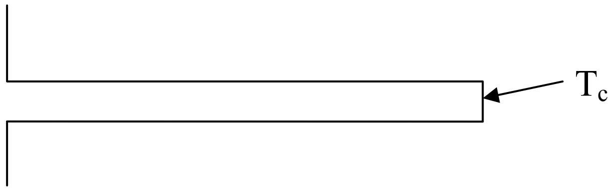
(6.1). 單一鰭片熱傳量

In the base element, the relationship between heat transfer and end temperature is

$$\dot{Q}_c = \frac{kmwb}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[2\theta_b - \theta_c\left(e^{mL} + e^{-mL}\right)\right] = Y_0\theta_b - X_0\theta_c$$

$$Y_0 = \frac{2kmwb}{e^{mL} - e^{-mL}}, \quad X_0 = \frac{kmwb}{e^{mL} - e^{-mL}}\left(e^{mL} + e^{-mL}\right)$$

$$\dot{Q}_b = \frac{kmwb}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[\theta_b\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) - 2\theta_c\right]$$

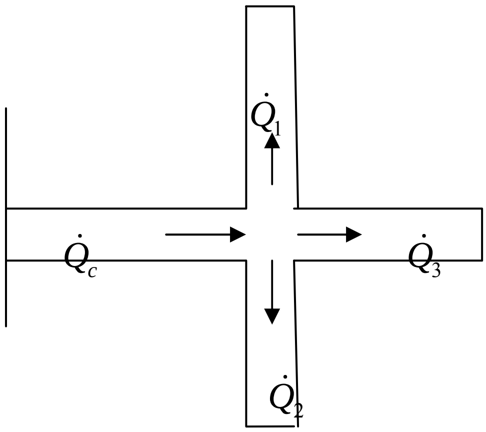



---

$\boxed{例}$，有一方柱鰭片，已知 L=10 cm，h=20 W/m$^2$-℃，k=390 W/m-℃，b=1cm，$T_a$=25℃ ，$T_b$=100℃ ，$T_e$=50℃ ，請計算熱傳量。

---

(6.2). 一組鰭片熱傳量




The junction temperature is $T_c$. If there are three extended fins at the junction, the heat transfer rate in each fin would be

$$\dot{Q}_1 = kb_1 w_1 m_1 \theta_c \frac{e^{2m_1L_1} - 1}{e^{2m_1L_1} + 1} = X_1\theta_c, \quad X_1 = kb_1 w_1 m_1 \frac{e^{2m_1L_1} - 1}{e^{2m_1L_1} + 1}$$

The energy balance at the junction would result in

$$\dot{Q}_c = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3$$

$$Y_0\theta_b - X_0\theta_c = X_1\theta_c + X_2\theta_c + X_3\theta_c$$

$$\theta_c = \frac{Y_0\theta_b}{X_0 + X_1 + X_2 + X_3}$$

The total heat transfer rate of the extended fin would be

$$\dot{Q}_b = \frac{kmwb}{e^{mL} - e^{-mL}}\theta_b \left[ \left( e^{mL} + e^{-mL} \right) - \frac{2Y_0}{X_0 + X_1 + X_2 + X_3} \right]$$

$$= \theta_b \left[ X_0 - \frac{Y_0}{2} \frac{2Y_0}{X_0 + X_1 + X_2 + X_3} \right]$$

---

$\boxed{\text{例}}$，有一組方柱鰭片，共有四段。已知每一段的尺寸皆相同，L=10 cm，h=20 W/m$^2$-℃，k=390 W/m-℃，b=1cm，$T_a$=25℃，$T_b$=100℃，請計算熱傳量與效益。

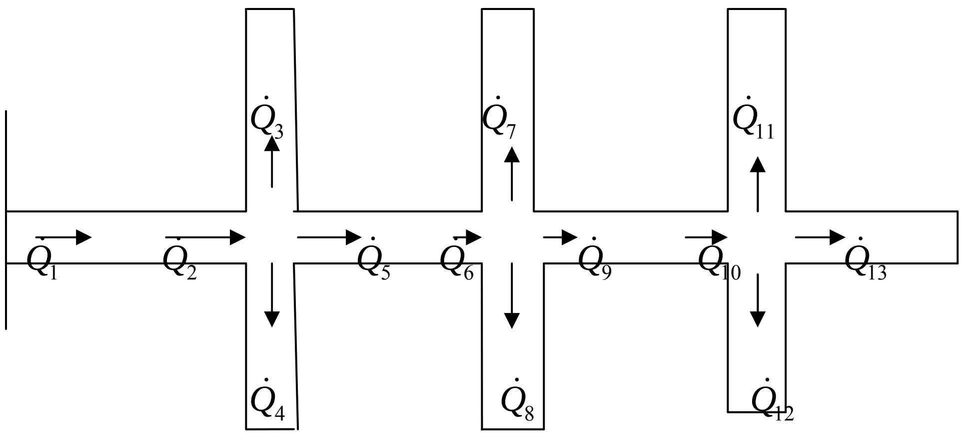
-------------------------------------------------------------------------------------------

作業 4.11，有一組方柱鰭片，共有六段。已知各段長度不同，分別爲底部 L=10 cm，頂部 L=5 cm，前後左右則都是 L=7 cm。其他條件則相同，h=20 W/m$^2$-℃，k=390 W/m-℃，b=1cm，$T_a$=25℃，$T_b$=100℃，請計算熱傳量與效益。

-------------------------------------------------------------------------------------------

(6.3). 多段式鰭片組熱傳量

For a three-stages cascade fin




The first stage:

$$\dot{Q}_{10} = \dot{Q}_{11} + \dot{Q}_{12} + \dot{Q}_{13}$$

$$\dot{Q}_{11} = \dot{Q}_{12} = \dot{Q}_{13} = kbwm\theta_{c3}\frac{e^{2mL}-1}{e^{2mL}+1} = X\theta_{c3}, \quad X = kmbw\frac{e^{2mL}-1}{e^{2mL}+1}$$

$$\dot{Q}_{10} = \frac{2kmwb}{e^{mL}-e^{-mL}}\theta_{c2} - \frac{e^{2mL}+1}{e^{2mL}-1}kmwb\theta_{c3} = Y\theta_{c2} - X\theta_{c3}, \quad Y = \frac{2e^{mL}}{e^{2mL}-1}kmwb$$

$$Y\theta_{c2} - X\theta_{c3} = 3X\theta_{c3}$$

$$Y\theta_{c2} - 4X\theta_{c3} = 0 \qquad (1)$$

$$\theta_{c3}=\frac{Y}{4X}\theta_{c2}=\frac{\frac{2kmwb}{e^{2mL}-1}e^{mL}}{4kmbw\frac{e^{2mL}-1}{e^{2mL}+1}}\theta_{c2}=\frac{(e^{2mL}+1)e^{mL}}{2(e^{2mL}-1)^2}\theta_{c2}$$

The second stage

$$\dot{Q}_6=\dot{Q}_7+\dot{Q}_8+\dot{Q}_9$$

$$\dot{Q}_7=\dot{Q}_8=X\theta_{c2}$$

$$\dot{Q}_9=\frac{2e^{mL}}{e^{2mL}-1}kmwb\theta_{c2}-\frac{e^{2mL}+1}{e^{2mL}-1}kmwb\theta_{c3}=Y\theta_{c2}-Z\theta_{c3},\ \ Z=\frac{e^{2mL}+1}{e^{2mL}-1}kmwb$$

$$\dot{Q}_6=Y\theta_{c1}-X\theta_{c2}$$

$$Y\theta_{c1}-X\theta_{c2}=2X\theta_{c2}+Y\theta_{c2}-Z\theta_{c3}$$

$$Y\theta_{c1}-(3X+Y)\theta_{c2}+Z\theta_{c3}=0 \qquad (2)$$

$$Y\theta_{c1}-(3X+Y)\theta_{c2}+\frac{ZY}{4X}\theta_{c2}=0$$

$$\theta_{c1}=\frac{1}{Y}(3X+Y-\frac{ZY}{4X})\theta_{c2}=(\frac{3X}{Y}+1-\frac{Z}{4X})\theta_{c2}$$

$$\theta_{c2}=\frac{\theta_{c1}}{\frac{3X}{Y}+1-\frac{Z}{4X}}$$

The third stage

$$\dot{Q}_2=\dot{Q}_3+\dot{Q}_4+\dot{Q}_5$$

$$\dot{Q}_3=\dot{Q}_4=X\theta_{c1}$$

$$\dot{Q}_5=Y\theta_{c1}-Z\theta_{c2}$$

$$\dot{Q}_2=Y\theta_b-X\theta_{c1}$$

$$Y\theta_b-X\theta_{c1}=2X\theta_{c1}+Y\theta_{c1}-Z\theta_{c2}$$

$$(3X+Y)\theta_{c1}-Z\theta_{c2}=Y\theta_b \qquad (3)$$

將方程式聯立，可得

$$\begin{pmatrix} 3X+Y & -Z & 0 \\ Y & -(3X+Y) & Z \\ 0 & Y & -4X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_{c1} \\ \theta_{c2} \\ \theta_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y\theta_b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_{c1} \\ \theta_{c2} \\ \theta_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3X+Y & -Z & 0 \\ Y & -(3X+Y) & Z \\ 0 & Y & -4X \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} Y\theta_b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta_{c1} = \frac{(3X+Y)4X - YZ}{\Delta} Y\theta_b$$

$$\theta_{c2} = -\frac{4XZ}{\Delta} Y\theta_b$$

$$\theta_{c3} = -\frac{Z^2}{\Delta} Y\theta_b$$

$$\Delta = (3X+Y)^2 4X - (3X+Y)ZY - 4XYZ$$

$$\dot{Q}_b = \frac{kmwb}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[\theta_b\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) - 2\theta_{c1}\right] = \frac{kmwb\theta_b}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) - 2\frac{(3X+Y)4X - YZ}{\Delta} Y\right]$$

$$\left(3X + Y - \frac{Z}{\frac{3X}{Y} + 1 - \frac{Z}{4X}}\right)\theta_{c1} = Y\theta_b$$

$$\left(\frac{3X}{Y} + 1 - \frac{1}{Y}\frac{Z}{\frac{3X}{Y} + 1 - \frac{Z}{4X}}\right)\theta_{c1} = \theta_b$$

$$\theta_{c1} = \frac{1}{\frac{3X}{Y} + 1 - \frac{1}{Y}\frac{Z}{\frac{3X}{Y} + 1 - \frac{Z}{4X}}}\theta_b$$

$$\theta_{c2}=\frac{\theta_{c1}}{\frac{3X}{Y}+1-\frac{Z}{4X}}=\frac{1}{\frac{3X}{Y}+1-\frac{Z}{4X}}\frac{1}{\frac{3X}{Y}+1-\frac{1}{Y}\frac{Z}{\frac{3X}{Y}+1-\frac{Z}{4X}}}\theta_b$$

$$\theta_{c3}=\frac{Y}{4X}\theta_{c2}=\frac{Y}{4X}\frac{1}{\frac{3X}{Y}+1-\frac{Z}{4X}}\frac{1}{\frac{3X}{Y}+1-\frac{1}{Y}\frac{Z}{\frac{3X}{Y}+1-\frac{Z}{4X}}}\theta_b$$

The total heat transfer

$$\dot{Q}_1=Y\theta_b-Z\theta_{c1}=\left(Y-\frac{Z}{\frac{3X}{Y}+1-\frac{1}{Y}\frac{Z}{\frac{3X}{Y}+1-\frac{Z}{4X}}}\right)\theta_b$$

In general

The first stage

$$Y\theta_{n-1}-X\theta_n=3X\theta_n$$

$$-Y\theta_{n-1}+4X\theta_n=0$$

The middle stage

$$Y\theta_{n-1}-X\theta_n=2X\theta_n+Y\theta_n-Z\theta_{n+1}$$

$$-Y\theta_{n-1}+(3X+Y)\theta_n-Z\theta_{n+1}=0$$

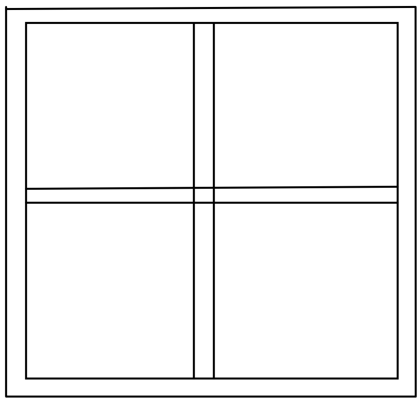
The last stage

$$Y\theta_b-X\theta_1=2X\theta_1+Y\theta_1-Z\theta_2$$

$$(3X+Y)\theta_1-Z\theta_2=Y\theta_b$$

The total heat transfer

$$\dot{Q}_1 = Y\theta_b - Z\theta_{c1}$$



(5.5). Compact heat exchanger

cell length=L，cell width：w，cell height：b，wall thickness：δ

Flow A：

$$kA\frac{d^2T}{dx^2}-ph_A(T-T_A)=0$$

$$\theta=T-T_A$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-s_A^2\theta=0\ ,\ s_A^2=\frac{2h_A}{k\delta}$$

$$\theta=c_1e^{s_Ax}+c_2e^{-s_Ax}$$

$$x=\frac{w}{2}\ ,\ \frac{d\theta}{dx}=c_1s_Ae^{s_Aw/2}-c_2s_Ae^{-s_Aw/2}=0\ ,\ c_2=c_1e^{s_Aw}$$

$$x=0\ ,\ \theta=\theta_b=c_1+c_1e^{s_Aw}\ ,\ c_1=\frac{\theta_b}{e^{s_Aw}+1}$$

$$\theta=\frac{\theta_b}{e^{s_Aw}+1}\left(e^{s_Ax}+e^{s_Aw}e^{-s_Ax}\right)$$

$$\dot{q}''_A=-k\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}=-k\frac{\theta_bs_A}{e^{s_Aw}+1}\left(1-e^{s_Aw}\right)=k\theta_bs_A\frac{e^{m_Aw}-1}{e^{m_Aw}+1}$$

$$\dot{q}'_A=2\delta k\theta_bs_A\frac{e^{s_Aw}-1}{e^{s_Aw}+1}+2h_Ab_A\theta_b=2\left(\delta ks_A\frac{e^{s_Aw}-1}{e^{s_Aw}+1}+b_Ah_A\right)\theta_b$$

$$\dot{m}_Ac_A\frac{dT_A}{dx}=\dot{q}'_{\mathbf{A}}=2\left(\delta ks_A\frac{e^{s_Aw}-1}{e^{s_Aw}+1}+b_Ah_A\right)(T_b-T_A)$$

$$\frac{d(T_A-T_b)}{dx}+\frac{2}{\dot{m}_Ac_A}\left(\delta ks_A\frac{e^{s_Aw}-1}{e^{s_Aw}+1}+b_Ah_A\right)(T_A-T_b)=0$$

$$\frac{d(T_A-T_b)}{dx}+\frac{1}{\lambda_A}(T_A-T_b)=0$$

$$\frac{T_{Ae}-T_b}{T_{Ai}-T_b}=e^{-\frac{L_A}{\lambda_A}}\ ,\ \frac{1}{\lambda_A}=\frac{2}{\dot{m}_Ac_A}\left(\delta ks_A\frac{e^{s_Aw}-1}{e^{s_Aw}+1}+b_Ah_A\right)$$

$$\frac{T_{Ae}-T_b}{T_{Ai}-T_b}=e^{-\frac{L_A}{\lambda_A}}=X_A \text{，} \frac{T_{Be}-T_b}{T_{Bi}-T_b}=e^{-\frac{L_B}{\lambda_B}}=X_B$$

已知：$T_{Ai}$ ，$T_{Bi}$ ，$\dot{m}_A$ ，$\dot{m}_B$

未知：$T_{Ae}$ ，$T_{Be}$ ，$T_b$

$$\frac{L_B}{b_A}\dot{m}_A c_A\left(T_{Ae}-T_{Ai}\right)+\frac{L_A}{b_B}\dot{m}_B c_B\left(T_{Be}-T_{Bi}\right)=0$$

$$\dot{M}_A c_A\left(T_{Ae}-T_{Ai}\right)+\dot{M}_B c_B\left(T_{Be}-T_{Bi}\right)=0$$

$$\frac{L_B}{b_A}\dot{m}_A=\dot{M}_A \text{，} \frac{L_A}{b_B}\dot{m}_B=\dot{M}_B$$

$$T_{Ae}-T_b=X_A\left(T_{Ai}-T_b\right) \text{，} T_{Ae}=T_b+X_A\left(T_{Ai}-T_b\right)$$

$$T_{Be}-T_b=X_B\left(T_{Bi}-T_b\right) \text{，} T_{Be}=T_b+X_B\left(T_{Bi}-T_b\right)$$

$$\dot{M}_A c_A\left(T_b(1-X_A)+T_{Ai}(X_A-1)\right)+\dot{M}_B c_B\left(T_b(1-X_A)+T_{Bi}(X_A-1)\right)=0$$

$$T_b\left(\dot{M}_A c_A(1-X_A)+\dot{M}_B c_B(1-X_B)\right)=\dot{M}_A c_A T_{Ai}(1-X_A)+\dot{M}_B c_B T_{Bi}(1-X_B)$$

$$T_b=\frac{\dot{M}_A c_A T_{Ai}(1-X_A)+\dot{M}_B c_B T_{Bi}(1-X_B)}{\dot{M}_A c_A(1-X_A)+\dot{M}_B c_B(1-X_B)}$$

$$T_{Ae}=T_b\left(1-X_A\right)+X_A T_{Ai}$$

$$T_{Be}=T_b\left(1-X_B\right)+X_B T_{Bi}$$

例：以空氣來冷卻水。

水：$T_{Ai}$=80℃ ，L = 100 m，w = 5 cm，b = 2 cm，δ = 1 mm，u = 0.5 m/sec

空氣：$T_{Bi}$=25℃ ，L = 1 m，w = 10 cm，b = 5 cm，δ = 1 mm，u = 5.0 m/sec

銅板：k = 390 W/m-℃

水 80℃ ，ρ = 971 kg/$m^3$，μ = 3.55*$10^{-4}$ kg/m-s，Pr = 2.20，k = 0.67 W/m-s

$c_p$ = 4193 J/kg-℃ ，D = 4A/P = 2.857 cm，$\dot{m}_A$= 0.4855 kg/sec

Re = 39074

$Nu_D = 0.023\mathrm{Re}_D^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{0.3} = 137.39 = \dfrac{hD}{k}$，h = 3221.9 W/m$^2$-℃

$s_A^2 = \dfrac{2h_A}{k\delta} = 16523$，$s_A = 128.54$

$$\frac{1}{\lambda_A} = \frac{2}{\dot{m}_A c_A}\left(\delta k s_A \frac{e^{s_A w}-1}{e^{s_A w}+1} + b_A h_A\right) = 0.1124$$

$X_A = 0$

空氣：25℃，ρ = 1.1774 kg/m$^3$，μ = 1.846*10$^{-5}$ kg/m-s，Pr = 0.708，

k = 0.026247 W/m-s，$c_p$ = 1005.7 J/kg-℃，D = 4A/P = 6.667 cm，

$\dot{m}_B = 0.02944$ kg/sec

Re = 21272

$Nu_D = 0.023\mathrm{Re}_D^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{0.4} = 58.08 = \dfrac{hD}{k}$，h = 22.86 W/m$^2$-℃

$s_B^2 = \dfrac{2h_B}{k\delta} = 117.2$，$s_B = 10.828$

$$\frac{1}{\lambda_B} = \frac{2}{\dot{m}_B c_B}\left(\delta k s_B \frac{e^{s_B w}-1}{e^{s_B w}+1} + b_B h_B\right) = 0.218$$

$X_B = 0.804$

$\dot{m}_A = 0.4855$ kg/sec，$\dot{M}_A = 24.275$ kg/sec

$\dot{m}_B = 0.02944$ kg/sec，$\dot{M}_A = 58.88$ kg/sec

$$T_b = \frac{\dot{M}_A c_A T_{Ai}(1-X_A) + \dot{M}_B c_B T_{Bi}(1-X_B)}{\dot{M}_A c_A (1-X_A) + \dot{M}_B c_B (1-X_B)} = 74.36\ ℃$$

$$T_{Ae} = T_b\left(1-X_A\right) + X_A T_{Ai} = 74.36\ ℃$$

$$T_{Be} = T_b\left(1-X_B\right) + X_B T_{Bi} = 34.67\ ℃$$