

## 第五章 對流熱傳

Update: 5/17/2015

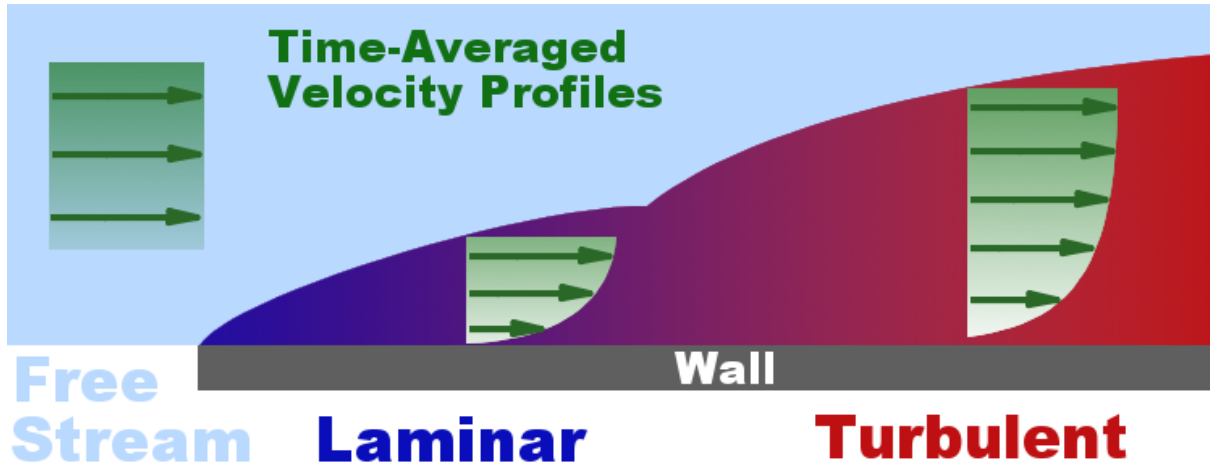
### 熱傳常用的無因次參數

參數	符號	定義	用途
Nusselt number	Nu	$hD/k$	自然對流，強制對流，沸騰，凝結。
Reynolds number	Re	$\rho VD/\mu$	強制對流，沸騰，凝結。
Prandtl number	Pr	$c_p\mu/k$ ( $v/\alpha$ )	自然對流，強制對流，沸騰，凝結。
Stanton number	St	$Nu/Re Pr$	強制對流
Grashof number	Gr	$g\beta\rho^2\Delta tL^3/\mu^2$	自然對流
Peclet number	Pe	$Re Pr$	強制對流
Graetz number	Gz	$Re Pr D/L$	強制對流
Rayleigh number	Ra	$Gr Pr$	自然對流
Biot number	Bi	$hD/k$	非穩態傳導

## (一)、強制對流

### (1.1). 平板流

平板上的邊界層包括層流區(laminar region)與紊流區(turbulent region)。



Flow over a flap plate

層流區與紊流區的交界處為  $x_{crit}$ ，而  $x_{crit}$  發生的位置與流速有關，一般定義為

$$Re_{crit} = \frac{\rho u_{\infty} x_{crit}}{\mu} = 5 \times 10^5$$

$$x_{crit} = 5 \times 10^5 \frac{\mu}{\rho u_{\infty}}$$

例如 300 K 的空氣：

$$\mu = 1.8462 \times 10^{-5} \text{ kg/m-sec}, \quad \rho = 1.1774 \text{ kg/m}^3,$$

$$u_{\infty} = 1 \text{ m/s}, \quad x_{crit} = 7.841 \text{ m},$$

$$u_{\infty} = 5 \text{ m/s}, \quad x_{crit} = 1.568 \text{ m},$$

$$u_{\infty} = 10 \text{ m/s}, \quad x_{crit} = 0.784 \text{ m},$$

速度越高，層流區與紊流區的交界處越早發生。

層流區與紊流區的熱傳係數不一樣，整片平板的熱傳係數為層流區與紊流區的平均值。

層流區的熱傳係數

$$0 \leq \text{Re}_L \leq 5 \times 10^5$$

$$\text{Nu}_L = 0.664 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \text{Re}_L^{\frac{1}{2}}$$

紊流區的熱傳係數

$$\text{Re}_L > 5 \times 10^5$$

$$\text{Nu}_T = \frac{0.037 \text{Re}_L^{0.8} \text{Pr}^{\frac{1}{4}}}{1 + 2.443 \text{Re}_L^{-0.1} (\text{Pr}^{\frac{2}{3}} - 1)}$$

層流區與紊流區的平均熱傳係數

$$h = \frac{1}{L} \left( \int_0^{x_{crit}} h_{la} dx + \int_{x_{crit}}^L h_{tu} dx \right)$$

流體流過平板，溫度會改變，流體性質與溫度有關，必須以平均溫度來估算流體性質。

$$T_m = \frac{1}{2} (T_w + T_\infty)$$

---

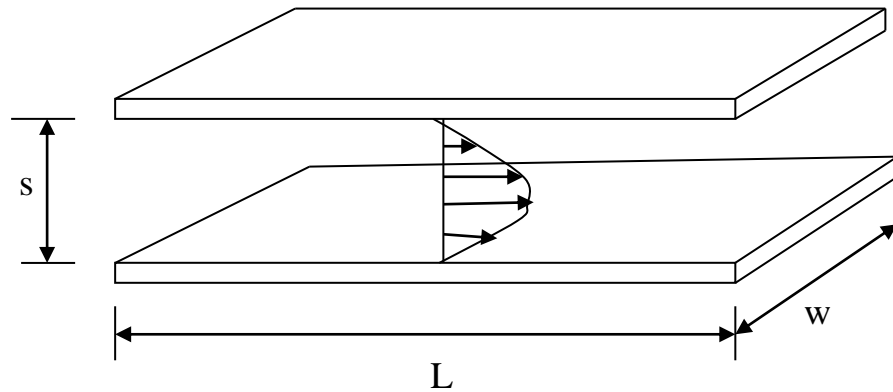
**例**，有一平板，已知寬 1 cm，長 3cm，表面溫度 100°C， $u_\infty = 1 \text{ m/s}$ ， $T_a = 25^\circ\text{C}$ ，請計算熱傳係數。

---

**例**，若該平板散熱量為 1W，請計算表面溫度。

---

(1.2) 平行平板流



$\theta = T - T_w$ , 空氣與平板溫差

$\theta_i = T_i - T_w$ , 空氣入口溫度

$\theta_e = T_e - T_w$ , 空氣出口溫度

$$\theta_m = \frac{\theta_i - \theta_e}{\ln \frac{\theta_i}{\theta_e}}, \text{平均溫度}$$

$s$ : 平板距離,  $w$ : 平板寬度,  $L$ : 平板長度

$$d_h = \frac{4A}{p} = \frac{4ws}{2(w+s)} \approx 2s: \text{水力直徑} (w \gg s)$$

$$Gz = \text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot \frac{d_h}{L}, \text{ Graetz number}$$

$$\text{層流: } \text{Re} = \frac{\rho d_h u}{\mu} < 2500$$

$$\text{Nu}_m = 7.54 + \frac{0.0289 \cdot Gz^{1.37}}{1 + 0.0438 \cdot Gz^{0.87}} = \frac{h_m d_h}{k}, \text{ the averaged value.}$$

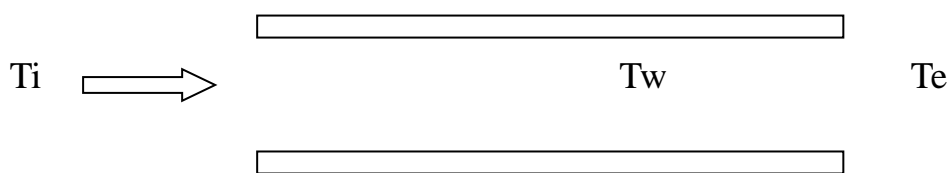
$$\text{Nu}_0 = \frac{Gz}{4} \left( 1 - e^{-\frac{4 \text{Nu}_m}{Gz}} \right), \text{ 出口的 Nusselt number}$$

紊流：

$$Nu_m = 0.407 Re^{0.55} \left( \frac{d_h}{L} \right)^{0.3}, \quad 2500 < Re_d < 7000, \quad 3 < \frac{L}{d_h} < 20$$

$$Nu_m = 0.0358 Re^{0.8} \left( \frac{d_h}{L} \right)^{0.2}, \quad 7000 < Re_d < 20000, \quad 3 < \frac{L}{d_h} < 20$$

$$Nu_m = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4}, \quad Re_d > 2300, \quad \frac{L}{d_h} > 20$$



空氣流經平板後，溫度會改變。

$$\dot{m}_a = \rho_i A u_i$$

$$\dot{m}_a c_a \frac{dT}{dx} = hp(T_w - T)$$

$$\frac{dT}{dx} + \frac{hp}{\dot{m}_a c_a} (T - T_w) = 0$$

平板流的方程式為

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{\lambda} = 0$$

$$\frac{hp}{\dot{m}_a c_a} = \frac{1}{\lambda}$$

$\lambda$  為熱傳的特徵長度

方程式之解為

$$\frac{\theta}{\theta_i} = e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

空氣出口溫度

$$\frac{\theta_e}{\theta_i} = e^{-\frac{L}{\lambda}}$$

空氣總熱傳量為(從空氣側看)

$$\dot{Q} = \dot{m}_a c_a (T_e - T_i) = \dot{m}_a c_a (\theta_e - \theta_i) = -\dot{m}_a c_a \theta_i (1 - e^{-\frac{L}{\lambda}})$$

空氣總熱傳量為(從平板側看)

$$\dot{Q} = hpL(T_w - T_m) = -hpL\theta_m$$

$$-\dot{m}_a c_a \theta_i (1 - e^{-\frac{L}{\lambda}}) = -hpL\theta_m$$

$$\theta_i (1 - e^{-\frac{L}{\lambda}}) = \frac{hpL}{\dot{m}_a c_a} \theta_m = \frac{L}{\lambda} \theta_m$$

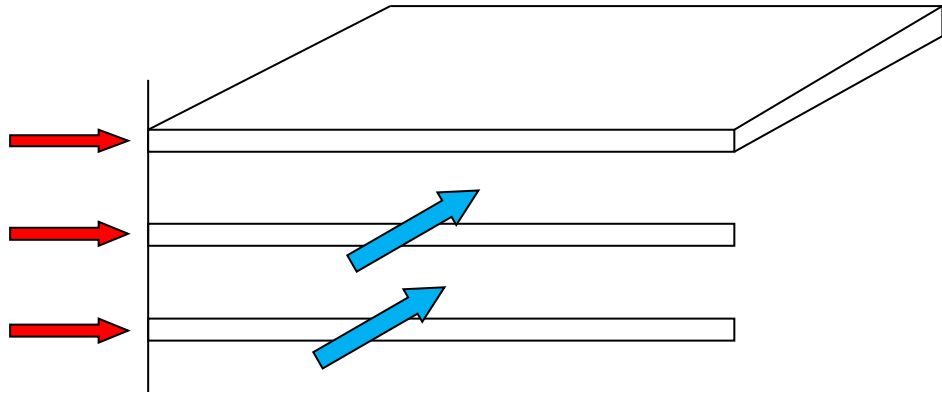
$$\frac{\theta_m}{\theta_i} = \frac{1 - e^{-\frac{L}{\lambda}}}{L/\lambda}$$

$$\ln \frac{\theta_e}{\theta_i} = -\frac{L}{\lambda}$$

$$\theta_m = \frac{\theta_i - \theta_e}{\ln \frac{\theta_i}{\theta_e}}$$

**例**，兩平行板之間的距離為 0.5 cm，長度 3 cm，寬度 1cm，表面溫度 100°C，空氣流速  $u_\infty = 1$  m/s，大氣溫度 25°C，請計算熱傳量。

**作業 5.1:** 兩平行板之間的距離為 0.5 cm，長度 3 cm，寬度 1cm，熱傳量 1W，空氣流速  $u_\infty = 1$  m/s，大氣溫度 25°C，請計算表面溫度。



若為平板鰭片，則平板上的溫度並不相同。

$$\dot{Q} = w\delta km\theta_b \frac{1 - e^{-2mL}}{1 + e^{-2mL}} = 2wLh\theta_w$$

$\theta_w$  為等效壁溫，即若整個平板表面都是  $\theta_w$ ，則會有相同熱傳量。

$$\theta_w = \theta_b \frac{w\delta km \frac{1 + e^{-2mL}}{2wLh} \frac{1 - e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}}}{mL \frac{1 - e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}}} = \frac{\theta_b}{mL} \frac{1 + e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}}$$

一、若已知  $T_b$ ，求熱傳量  $\dot{Q}$ 。

已知數： $\dot{m}_a$ ， $u_\infty$ ， $T_i$ ， $T_b$

未知數： $T_w$ ， $T_e$ ， $T_m$ ， $\dot{Q}$

中間參數： $\lambda$ ， $h$ ， $m$

(1). 假設  $T_w = T_b$

(2). 猜  $T_e$

(3). 計算  $T_m$ ， $\theta_m = \frac{\theta_i - \theta_e}{\ln \frac{\theta_i}{\theta_e}}$ ，由  $T_m$  計算空氣性質。

(4). 計算熱傳係數  $h$

(5). 計算熱傳特徵長度  $\lambda$

(6). 計算空氣出口溫度  $\frac{\theta_e}{\theta_i} = e^{-\frac{w}{\lambda}}$  (鰭片的寬度才是空氣的流道長度)

(7). 回到步驟(2)，重複以上計算，直到  $\theta_e$  數值收斂。

(8). 計算鰭片模數， $m^2 = \frac{2h}{k\delta}$

(9). 以  $T_m$  為空氣溫度 ( $\theta_w = T_b - T_m$ )，計算等效壁溫。

$$\theta_w = \frac{\theta_b}{mL} \frac{1 + e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}}$$

(10). 回到步驟(1)，重複以上計算，直到  $\theta_w$  數值收斂。

---

**例**，兩平板鰭片之間的距離為 0.5 cm，長度 3 cm，寬度 1cm，基部溫度 100°C，空氣流速  $u_\infty = 1$  m/s，大氣溫度 25°C，請計算熱傳量。

---

**作業 5.2:** 兩平板鰭片之間的距離為 0.5 cm，長度 3 cm，寬度 1cm，基部溫度 100°C，空氣流速  $u_\infty = 10$  m/s，大氣溫度 25°C，請計算熱傳量。

---

二、若已知  $\dot{Q}$ ，求  $T_b$ 。

已知數： $\dot{m}_a$ ， $u_\infty$ ， $T_i$ ， $\dot{Q}$

未知數： $T_w$ ， $T_e$ ， $T_m$ ， $T_b$

中間參數： $\lambda$ ， $h$ ， $m$

(1). 計算  $T_e$ ， $\dot{Q} = \dot{m}_a c_a (T_e - T_i)$

(2). 猜  $T_w$



(3). 計算  $\theta_i$  ,  $\theta_e$  , 與  $\theta_m = \frac{\theta_i - \theta_e}{\ln \frac{\theta_i}{\theta_e}}$  , 由  $T_m$  計算空氣性質。

(4). 計算熱傳係數  $h$

(5). 計算熱傳特徵長度  $\lambda$  ,  $\frac{1}{\lambda} = \frac{hp}{\dot{m}_a c_a}$

(6). 計算空氣出口溫度  $\frac{\theta_e}{\theta_i} = e^{-\frac{w}{\lambda}}$  (鰭片的寬度才是空氣的流道長度)

(7). 回到步驟(2), 重複以上計算, 直到  $\theta_e$  數值收斂。

(8). 計算鰭片模數,  $m^2 = \frac{2h}{k\delta}$

(9). 以  $T_m$  為空氣溫度 ( $\theta_w = T_b - T_m$ ) , 計算  $T_b$  。

$$\dot{Q} = w\delta km\theta_b \frac{1 - e^{-2mL}}{1 + e^{-2mL}}$$

---

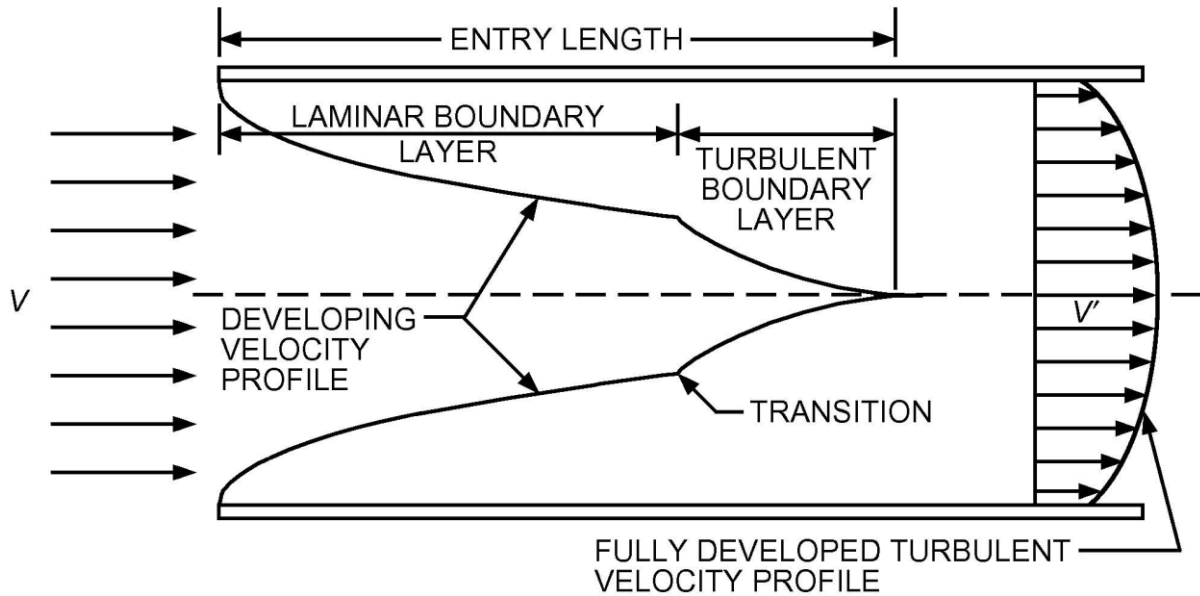
**例**, 兩平板鰭片之間的距離為 0.5 cm , 長度 3 cm , 寬度 1cm , 熱傳量 1W , 空氣流速  $u_\infty = 1$  m/s , 大氣溫度 25°C , 請計算基部溫度。

---

**作業 5.3:** 兩平板鰭片之間的距離為 0.5 cm , 長度 3 cm , 寬度 1cm , 熱傳量 1W , 空氣流速  $u_\infty = 10$  m/s , 大氣溫度 25°C , 請計算表面溫度。

---

(1.3). 內管流



層流: ( $Re < 2300$ )

發展中層流：

$$Nu = 1.86 \left( \frac{RePr}{D/L} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14}, \quad \frac{D}{L} < \frac{RePr}{8} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.42}$$

$$Nu = 3.66 + \frac{0.065(D/L)RePr}{1 + 0.04[(D/L)RePr]^{2/3}}$$

完全開展層流：

$$Nu = 3.66, \quad \text{壁面溫度固定}$$

$$Nu = 4.36, \quad \text{壁面熱傳量固定}$$

紊流：

發展中紊流：

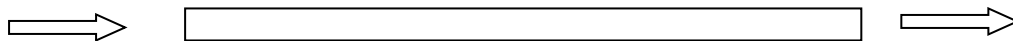
$$Nu = \frac{(f_s/2)(Re-1000)Pr}{1+1.27(f_s/2)^{1/2}(Pr^{2/3}-1)} \left[ 1 + \left( \frac{L}{D} \right)^{2/3} \right], \quad f_s = \frac{1}{(1.58 \ln Re - 3.28)^2}$$

完全開展紊流：

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4}, \quad \text{加熱流體(管壁溫度高於流體溫度)}$$

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.3}, \quad \text{冷卻流體(管壁溫度低於流體溫度)}$$

例，有一支水管，管徑 1cm，管長 1m，管壁溫度 100°C。冷水流入溫度 25°C，流速 0.1 m/s，請計算流出溫度。



$$\dot{m}c \frac{dT}{dx} = hp(T_w - T)$$

$$\frac{dT}{dx} + \frac{hp}{\dot{m}c}(T - T_w) = 0$$

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{\lambda} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{hp}{\dot{m}c} = \frac{h\pi d}{\rho \frac{\pi}{4} d^2 u c} = \frac{4h}{\rho d u c}$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$$\frac{\theta_e}{\theta_i} = e^{-\frac{L}{\lambda}}$$

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{4hL}{\rho d u c} = 4 \frac{\mu}{\rho d u} \frac{\alpha h d L}{k d} = 4 \frac{Nu}{Re Pr} \frac{L}{d}$$

$$\dot{Q} = \dot{m}c\theta_i(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}})$$

---

**作業 5.4:** 有一支水管，管徑 1cm，管長 1m，管壁溫度 100°C。冷水流入溫度 25°C，流出溫度 65°C，請計算流速。

---

#### (1.4). 外管流

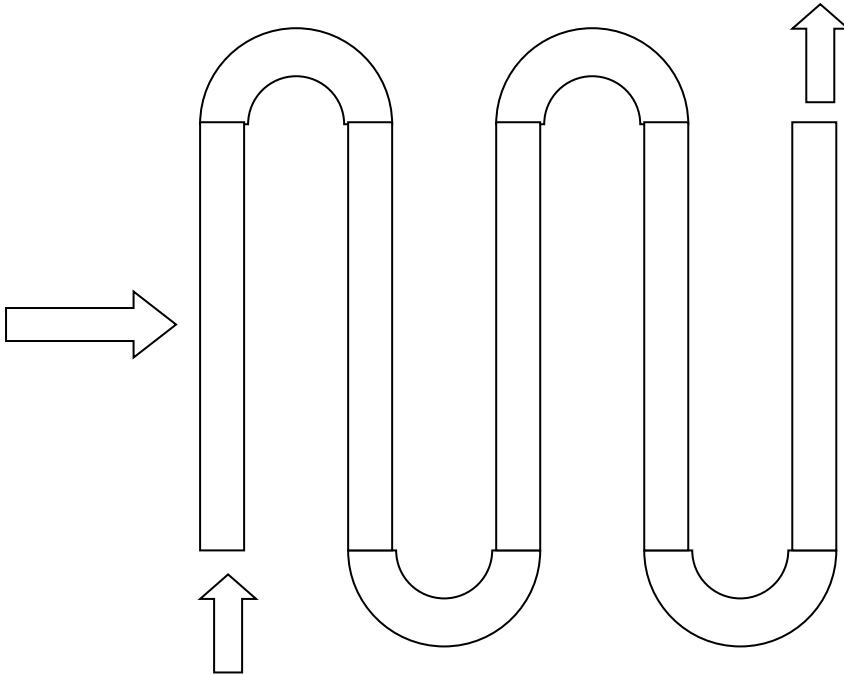
圓柱的熱傳系數

$$Nu = \frac{hd}{k_f} = C \left( \frac{u_\infty d}{\nu_f} \right)^n \text{Pr}_f^{1/3}$$

Re	C	n
0.4~4	0.989	0.330
4~40	0.911	0.385
40~4000	0.683	0.466
4000~40000	0.193	0.618
40000~400000	0.0266	0.805

-----

例，有一個空氣冷卻器，內徑 5 cm，共分五段，每段長度 5m，假設每一段的壁溫均勻，但各段溫度不同。入口空氣溫度 200°C，速度 5 m/sec，管壁外徑 5.6 cm，今以 25°C 的大氣冷卻，速度 1 m/sec，請計算出口溫度。



$$h_o A_o (T_w - T_a) = \dot{m}c(T_i - T_e) = \dot{m}c(T_i - T_w)(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}})$$

$$T_w = \frac{h_o A_o T_a + \dot{m}c(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}})T_i}{h_o A_o + \dot{m}c(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}})} = \frac{T_a + \alpha T_i}{1 + \alpha}$$

$$\alpha = \frac{\dot{m}c(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}})}{h_o A_o}$$

$$T_i - T_e = (T_i - \frac{T_a + \alpha T_i}{1 + \alpha})(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}}) = \frac{1 - e^{-\frac{L}{\lambda}}}{1 + \alpha} (T_i - T_a)$$

$$T_e = T_i - \frac{1 - e^{-\frac{L}{\lambda}}}{1 + \alpha} (T_i - T_a) = \frac{\alpha + e^{-\frac{L}{\lambda}}}{1 + \alpha} T_i + \frac{1 - e^{-\frac{L}{\lambda}}}{1 + \alpha} T_a = AT_i + BT_a$$

第一段的出口溫度為第二段的入口溫度，故第二段的出口溫度為

$$T_{e2} = A(AT_i + BT_a) + BT_a = A^2T_i + (A + 1)BT_a$$

第二段的出口溫度為第三段的入口溫度，故第三段的出口溫度為

$$T_{e3} = A^3T_i + (A^2 + A + 1)BT_a$$

第三段的出口溫度為第四段的入口溫度，故第四段的出口溫度為

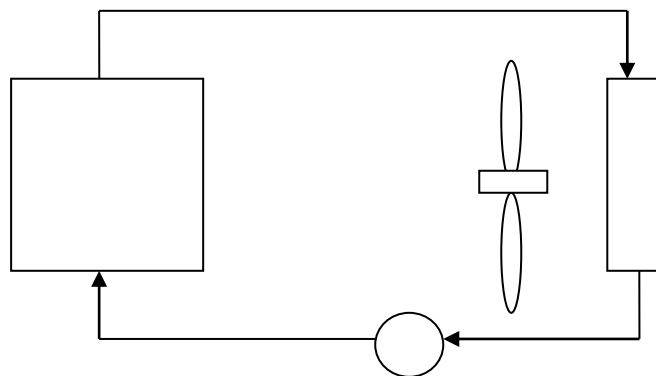
$$T_{e4} = A^4T_i + (A^3 + A^2 + A + 1)BT_a$$

第四段的出口溫度為第五段的入口溫度，故第五段的出口溫度為

$$T_{e5} = A^5T_i + (A^4 + A^3 + A^2 + A + 1)BT_a$$

---

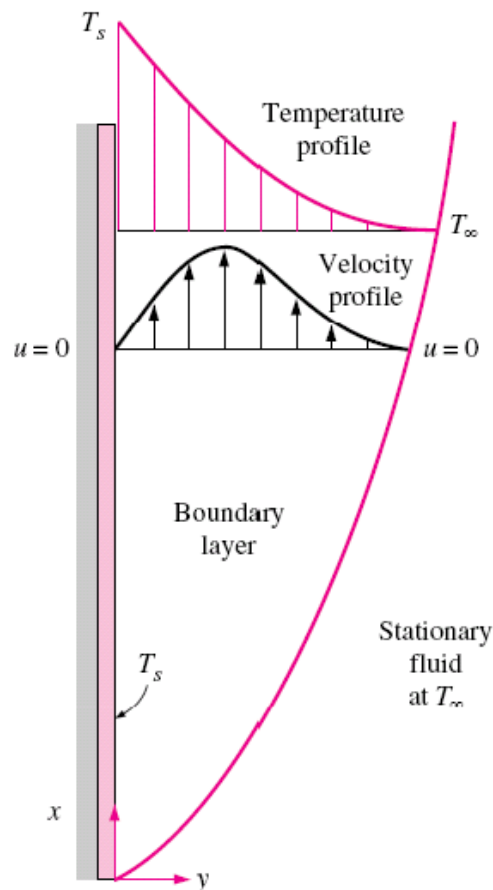
**Example:** A copper plate is used to dissipate 100W of heat. The dimension of plate is 20cm×15cm×1cm. The plate temperature should not be higher than 100°C. Design a water cooling system to remove the heat of plate. The ambient temperature is 25°C



## (二)、自然對流

### (2.1). 垂直平板流

The fluid motion is driven by density variations caused by temperature difference. The density of air is inversely proportional to temperature. Air in the vicinity of hot wall is heated and gets lighter. The cold air outside pushes the light air up.



Laminar flow on a vertical wall at constant temperature

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = \left( \frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} \frac{0.75 Pr^{1/2}}{(0.609 + 1.221 Pr^{1/2} + 1.238 Pr)^{1/4}}$$

$Gr_x = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2}$ , Grashof number, the ratio of the buoyancy force to the viscous force.

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T}, \text{ volumetric thermal expansion coefficient.}$$

$$h = \frac{k}{x} \left( \frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{0.75 Pr^{1/2}}{(0.609 + 1.221 Pr^{1/2} + 1.238 Pr)^{1/4}}$$

$$\bar{h} = \frac{4}{3} h_L = \frac{4}{3} \frac{k}{L} \left( \frac{Gr_L}{4} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{0.75 Pr^{1/2}}{(0.609 + 1.221 Pr^{1/2} + 1.238 Pr)^{1/4}}$$

$Ra = Gr Pr$ , Rayleigh number, transition from laminar to turbulence occurs at

$$Ra = 10^9$$

**Example:**

A vertical plate with 10 cm width and 20 cm height, is suspended in air. The surface temperature is  $70^\circ\text{C}$ . Calculate the heat transfer rate if the air temperature is  $25^\circ\text{C}$ .

$$T_w = 70^\circ\text{C}, \quad T_f = \frac{1}{2}(T_w + T_\infty) = 320.5 \text{ K}$$

$$\nu = 17.95 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad Pr = 0.7, \quad \beta = \frac{1}{T_f} = 3.12 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}, \quad k = 2.77 \times 10^{-2} \text{ W/m-K}$$

$$Gr_L = \frac{g \beta (T_w - T_\infty) L^3}{\nu^2} = 3.41 \times 10^7, \quad Ra = Gr Pr = 2.39 \times 10^7 < 10^9$$

$$\bar{h} = \frac{4}{3} \frac{k}{L} \left( \frac{Gr_L}{4} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{0.75 Pr^{1/2}}{(0.609 + 1.221 Pr^{1/2} + 1.238 Pr)^{1/4}} = 8.64 \times 0.499 = 4.31 \text{ W/m}^2\text{-K}$$

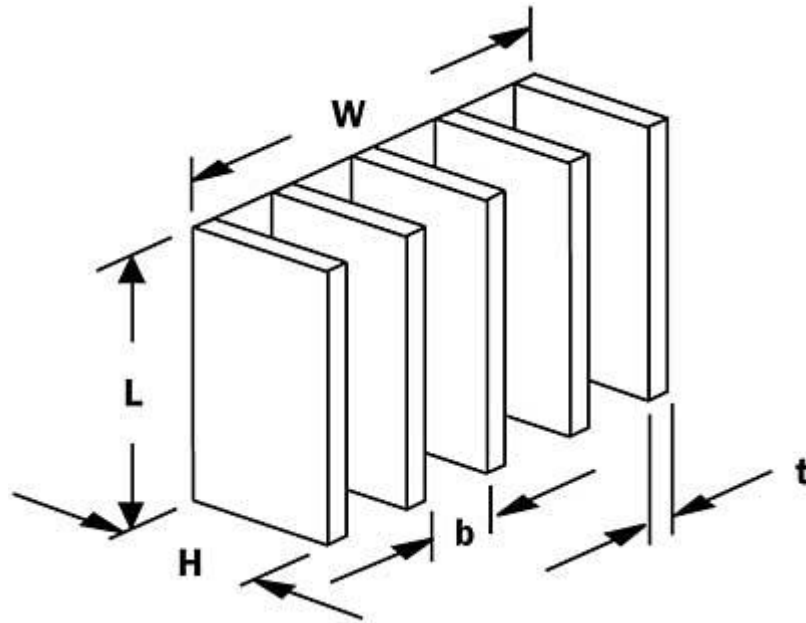
$$Q = A \bar{h} (T_w - T_\infty) = 3.6 \text{ W}$$

**Example:**

A vertical plate with 10 cm width and 20 cm height, is suspended in air. The heat dissipation rate is 5W. Calculate the surface temperature if the air temperature is  $25^\circ\text{C}$ .



(2.2). 平行平板流



$$Nu = \frac{hb}{k} = \frac{Ra}{24} \left( 1 - e^{-\frac{35}{Ra}} \right)^{0.75}$$

$$Ra = Gr_b Pr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)b^3}{\nu^2} \frac{b}{L} Pr = Gr_L \left( \frac{b}{L} \right)^4 Pr$$

$$Nu = \frac{35}{24} \frac{Ra}{35} \left( 1 - e^{-\frac{35}{Ra}} \right)^{0.75} = \frac{35}{24} X \left( 1 - e^{-\frac{1}{X}} \right)^{0.75}, \quad X = \frac{Ra}{35}$$

$$Ra \ll 35, \quad X \ll 1, \quad 1 - e^{-\frac{1}{X}} \approx 1, \quad Nu = \frac{35}{24} \frac{Ra}{35}$$

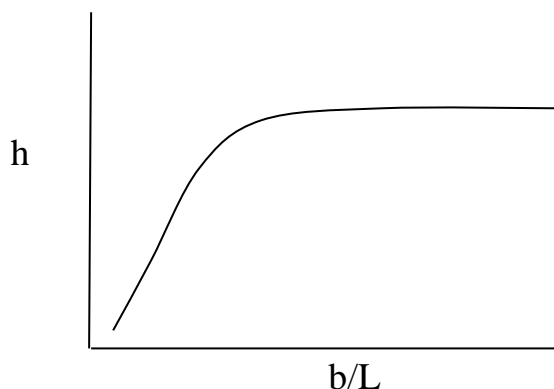
$$h = \frac{k}{b} Nu = \frac{L}{b} \frac{k}{L} Nu = \frac{1}{24} \frac{k}{L} Gr_L \left( \frac{b}{L} \right)^3 Pr$$

The heat transfer coefficient is proportional to the cubic of  $b/L$ .  $h \sim \left( \frac{b}{L} \right)^3$

$$Ra \gg 35, X \gg 1, 1 - e^{-\frac{1}{X}} \approx \frac{1}{X}, Nu = \frac{35}{24} \left( \frac{Ra}{35} \right)^{0.25}$$

$$h = \frac{L k}{b L} \frac{35}{24} \left( \frac{Ra}{35} \right)^{0.25} = \frac{35 k}{24 L} \left( \frac{Gr_L Pr}{35} \right)^{0.25}, Ra \gg 35$$

The heat transfer coefficient is not related to  $b/L$ .



If the width of a fin array is fixed, the gap between two neighboring fins is determined by the number of fins.

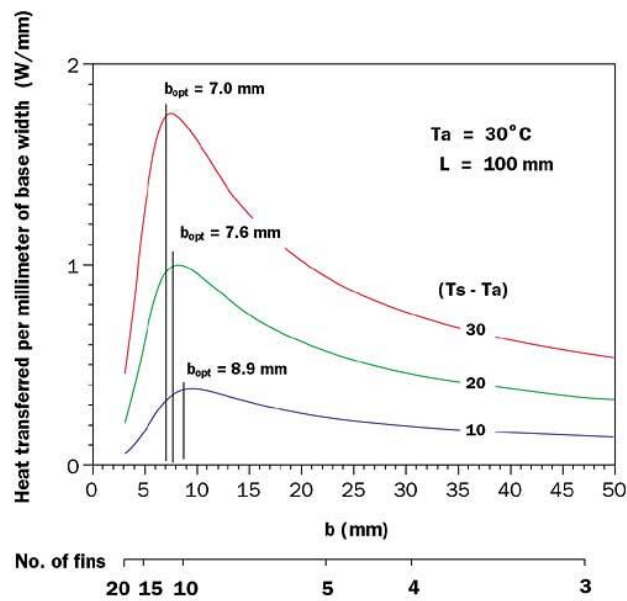
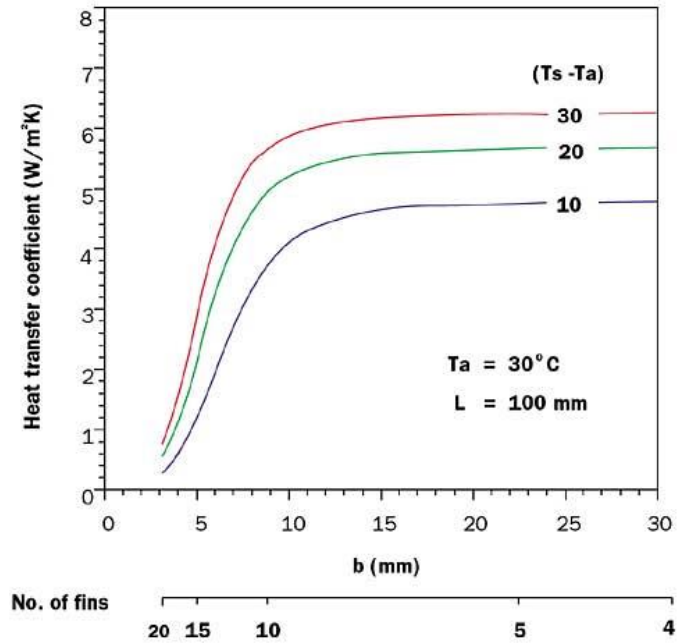
$$b = \frac{W - N_f t}{N_f - 1}$$

$$Q = hA\Delta T = 2N_f HLh\Delta T$$

It is noted that increasing the number of fins would decrease the gap between fins. However, the heat transfer rate would not increase proportionally because the heat transfer coefficient would be depressed if the spacing between fins is too crowded.

**Example:**

A vertical fin array has the following dimensions:  $L = 100$  mm,  $W = 100$  mm,  $H = 50$  mm,  $t = 2$  mm. Calculate the heat transfer coefficient if the air temperature is  $30^\circ\text{C}$ .



**Example:**

A vertical fin array has the following dimensions:  $L = 100$  mm,  $W = 100$  mm,  $H = 50$  mm,  $t = 2$  mm. Calculate the surface temperature if the dissipation power is 30W and the air temperature is  $30^\circ C$ .