第三章 熱傳元件(一)

鰭片

Update: 2019/7/19

鰭片屬於被動式散熱裝置，目的是增加熱傳面積，將熱源所傳導出來的熱能加速排出。

$\dot{Q} = hA\Delta T$

提高熱傳量的方法：增強 h 值，加大 A，提高 ΔT 值。

鰭片的作用是加大 A 值。

鰭片的效果

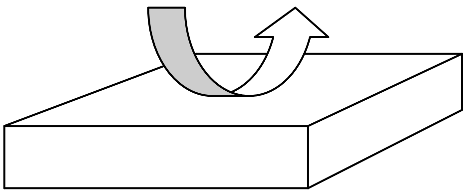
效益(effectiveness) ε：有裝鰭片的熱傳量與沒有裝鰭片的熱傳量的比較

效率(efficiency) η：真實的熱傳量與理想的熱傳量的比較

(1.1). 鰭片的功能

鰭片的功能是用來加強熱傳。熱傳量與熱傳面積，熱傳係數，及溫差成正比。

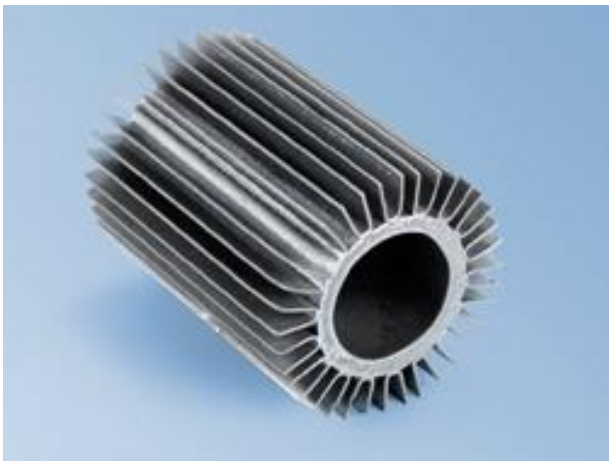
$$\dot{Q} = hA\Delta T$$

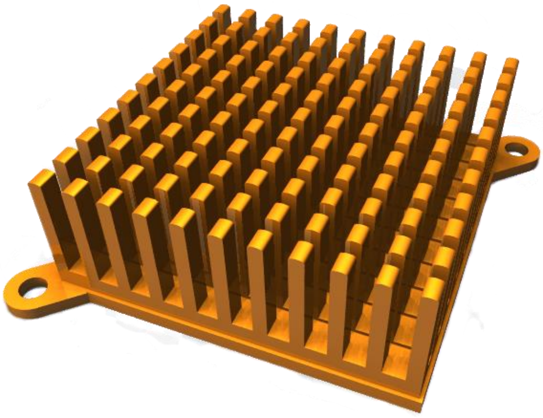


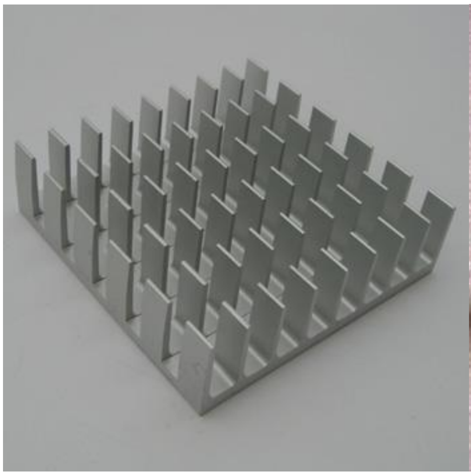
要加強熱傳，必須加大熱傳面積，增強熱傳係數，或提高溫差。但是提高溫差不一定可行，因工作溫度通常都受到限制。較常用的方法是增強熱傳係數或是加大熱傳面積。

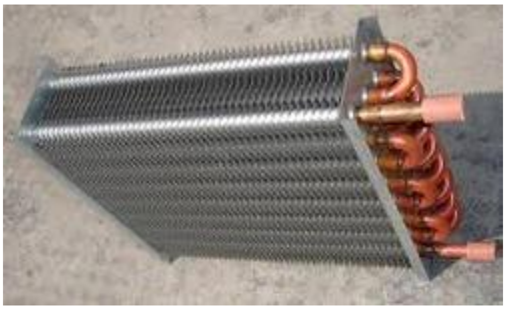
增強熱傳係數的方法包括使用強制對流，使用兩相流，加大熱傳面積的方

法就是使用鰭片。









鰭片的效果

效益(effectiveness) ε ：有裝鰭片的熱傳量與沒有裝鰭片的熱傳量的比較

效率(efficiency) η ：真實的熱傳量與理想的熱傳量的比較

作業 4.1，閱讀參考資料，並寫一份內容摘要。

劉君愷，「散熱片之設計與在電子冷卻技術中之應用」。

(1.2). 鰭片分類

以形狀區分：

板狀散熱鰭片 ：平板式，三角形，拋物線

柱狀散熱鰭片 ：圓柱，方柱，六角柱，錐狀柱

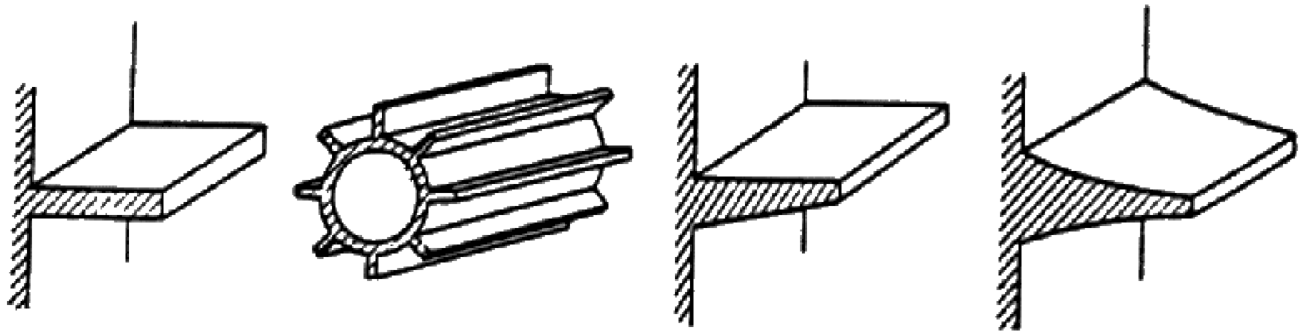
環狀散熱鰭片 ：圓環，楔型

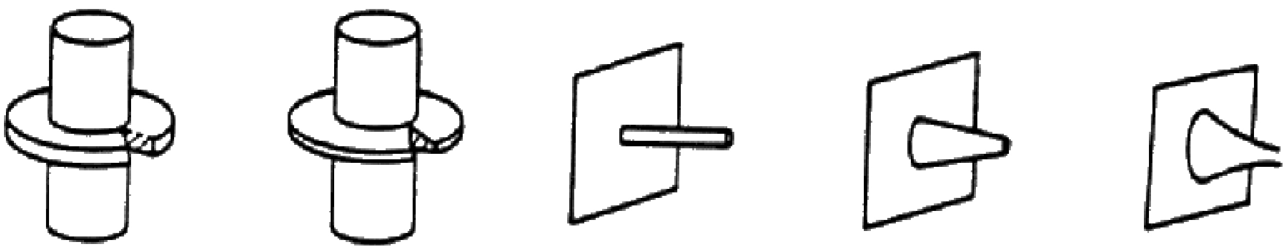
以截面積區分：

固定截面積散熱鰭片

變化截面積散熱鰭片

平板式　　平板式　　三角形　　拋物線

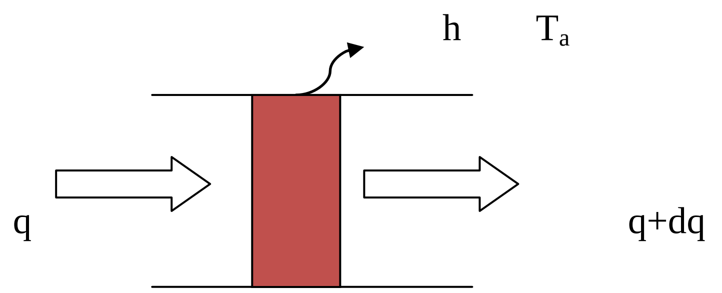




環狀　　圓柱狀　　圓錐狀

二、等截面鰭片

(2.1). 等截面鰭片理論模式



左邊熱傳量(傳導)： qA

右邊熱傳量(傳導)： $(q+dq)A$

四周熱傳量(對流)： $ph(T-T_a)dx$

能量平衡：左邊熱傳量(傳導) =右邊熱傳量(傳導)+四周熱傳量(對流)

$$qA=(q+dq)A+ph(T-T_a)dx$$

$$Adq+ph(T-T_a)dx=0$$

$$\frac{dq}{dx}+\frac{ph}{A}(T-T_a)=u'''$$

依據 Fourier's Law

$$q=-k\frac{dT}{dx}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{ph}{Ak}(T-T_a)=0$$

令 $m^2=\frac{ph}{A}$，$\theta=T-T_a$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0$$

(2.2). 平板鰭片

$A = w\delta$ ， $p = 2(w+\delta) \approx 2w$

$$m^2 = \frac{ph}{kA} = \frac{2h}{k\delta}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

該方程式之解為

$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

其中c_1與c_2由邊界條件決定。

(2.2.1). 無限長度的平板鰭片

無限長度的平板鰭片 $c_1 = 0$

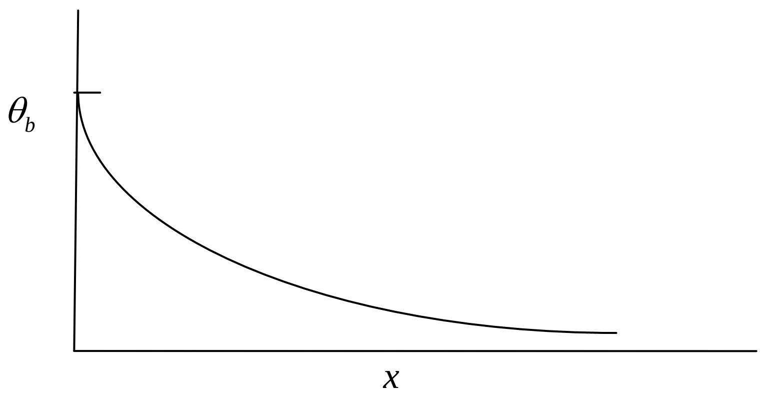
$$\theta = c_2 e^{-mx}$$

而在鰭片的基部，其溫度為已知值。

$x = 0$ ， $T = T_b$ ， $\theta = T_b - T_a = \theta_b$

$$\theta_b = c_2$$

故無限長平板鰭片的溫度分佈為： $\theta = \theta_b e^{-mx}$



當 $x\to\infty$ 時，$\theta\to 0$ ，$T\to T_a$

$$q''=-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}$$ ，單位面積的熱傳量

$$\frac{dT}{dx}=\frac{d\theta}{dx}=-m\theta_b e^{-mx}$$

$$q''=-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}=km\theta_b$$

$\dot{q}'=\dot{q}'\delta=\sqrt{2hk\delta}\theta_b$ ，單位長度的熱傳量

無限長平板鰭片的熱傳量

$$\dot{Q}_\infty=Aq''=kmw\delta\theta_b$$

無限長平板鰭片的效益

$$\varepsilon=\frac{\dot{Q}_\infty}{hA\theta_b}=\frac{km}{h}=\sqrt{\frac{2k}{h\delta}}$$

注意:

若 $\frac{2k}{h\delta}<1$，或 $h>\frac{2k}{\delta}$ ，則 $\varepsilon<1$，散熱鰭片沒有散熱功能。

K = 390 W/m-℃ ，δ = 1mm，相當於 h > 390000 W/m^2-℃ ，不易發生。

無限長平板鰭片的效率

$$\eta=\frac{\dot{Q}_\infty}{2hpL\theta_b}\to 0$$

$\boxed{\text{例}}$，有一無限長度的鰭片 ，T_a=25℃ ，T_b=100℃ ，請計算單位寬度的熱傳量與效益。

h=20 W/m^2-℃ ，k=390 W/m-℃ ，δ=1mm

加強熱傳：熱傳量增加，但效益降低。

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_\infty}{hA\theta_b} = \frac{km}{h} = \sqrt{\frac{2k}{h\delta}} = 197$$

The enhancement in heat transfer rate is great. However, it is finite, not infinity.

h=200 W/m^2-℃ ，k=390 W/m-℃ ，δ=1mm

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_\infty}{hA\theta_b} = \frac{km}{h} = \sqrt{\frac{2k}{h\delta}} = 62.4$$

更換材料：熱傳量與效益都降低。

h=20 W/m^2-℃ ，k=50 W/m-℃ ，δ=1mm

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_\infty}{hA\theta_b} = \frac{km}{h} = \sqrt{\frac{2k}{h\delta}} = 70.7$$

增加厚度：熱傳量增加，但效益降低。

h=20 W/m^2-℃ ，k=390 W/m-℃ ，δ=5mm

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_\infty}{hA\theta_b} = \frac{km}{h} = \sqrt{\frac{2k}{h\delta}} = 88.3$$

柱形鰭片的方程式與平板鰭片相同，只是 m^2 的定義不一樣。

方柱形鰭片： $A = b^2$ ， $p = 4b$ ， $m^2 = \dfrac{ph}{kA} = \dfrac{4h}{kb}$

圓柱形鰭片： $A = \dfrac{\pi d^2}{4} = \pi r^2$ ， $p = \pi d$ ， $m^2 = \dfrac{ph}{kA} = \dfrac{4h}{kd} = \dfrac{2h}{kr}$

作業 4.2

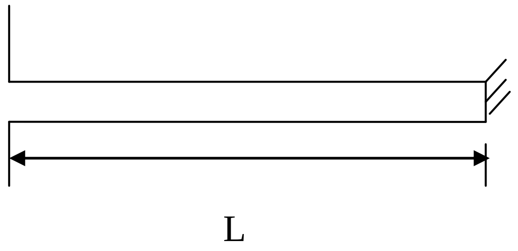
有一圓柱形的無限長鰭片，直徑為 0.5cm，底座溫度 100℃，熱傳導係數為 70W/m℃ ，熱傳係數為 20 W/m^2-℃ ，外界溫度為 20℃ ，請計算熱傳量。

(1.66W)

(2.2.2). 有限長度的平板鰭片

有限長度的平板鰭片有三種不同的邊界條件：絕熱端，對流端，等溫端。

(i). x=L，$\dfrac{dT}{dx}=0$，端點絕熱



$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

$x=0$，$T=T_b$

$$\theta = c_1 + c_2 = \theta_b$$

$x=L$，$\dfrac{d\theta}{dx} = mc_1 e^{mx} - mc_2 e^{-mx} = mc_1 e^{mL} - mc_2 e^{-mL} = 0$

$$c_1 = c_2 e^{-2mL}$$

$$c_1 + c_2 = c_2 e^{-2mL} + c_2 = c_2(1+e^{-2mL}) = \theta_b$$

$$c_2 = \frac{\theta_b}{1+e^{-2mL}}$$

$$c_1 = c_2 e^{-2mL} = \frac{e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}\theta_b$$

鰭片內的溫度分布為：

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{1}{1+e^{-2mL}}(e^{-2mL}e^{mx} + e^{-mx})$$

端點溫度為：

$x = L$ ，$\dfrac{\theta_e}{\theta_b} = \dfrac{2e^{-mL}}{1+e^{-2mL}}$ ，端點溫度與基部溫度之比值

單位面積的熱傳量

$$\dot{q}'' = -k\frac{d\theta}{dx} = km\theta_b \frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}} = km\theta_b X$$

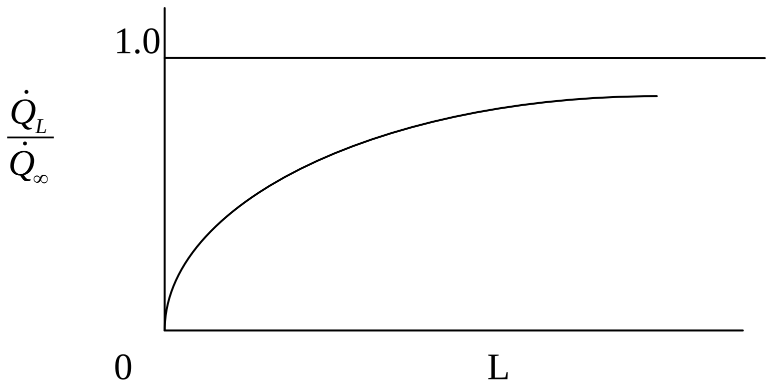
$X = \dfrac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$ ：有限長度平板鰭片端點絕熱的修正係數

總熱傳量

$$\dot{Q}_L = w\sqrt{2hk\delta}\,\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}\theta_b = X\dot{Q}_\infty$$

$\dfrac{\dot{Q}_L}{\dot{Q}_\infty} = \dfrac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}} < 1$ ，與無限翼片總熱傳量之比值

L 越長，熱傳量越大。



鰭片表面平均溫度：

$$\dot{Q}_L = w\sqrt{2hk\delta}\,\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}\theta_b = Ah\theta_m = 2Lwh\theta_m$$

$$\theta_m = \frac{w\sqrt{2hk\delta}}{2Lwh}\,\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}\theta_b = \frac{1}{mL}\,\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}\theta_b$$

鰭片效益：

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_\infty}{hA\theta_b} = \frac{km}{h} = \sqrt{\frac{2k}{h\delta}}$$

例，有一鰭片，已知 L=10 cm，h=20 W/m^2-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，W=5cm，T_a=25℃，T_b=100℃，請計算熱傳量(11.4W)，端點溫度(73.1℃)，鰭片表面平均溫度(81.8℃)，與效益(151)。

作業 4.3

有一圓柱形的半圓環把手固定在底座上，圓柱的直徑為 0.5cm，而整個圓環的直徑為 20cm。已知底座的溫度為 100℃，把手的熱傳導係數為 70W/m℃，把手與外界的熱傳係數為 20 W/m^2-℃，外界的溫度為 20℃，請計算把手的最低溫度與表面平均溫度。(34.8℃, 53.1℃)

設定熱傳量：

$$\frac{\dot{Q}_L}{\dot{Q}_\infty} = \gamma = \frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$$

$$1-e^{-2mL} = \gamma\cdot\left(1+e^{-2mL}\right)$$

$$1-\gamma = \left(1+\gamma\right)e^{-2mL}$$

$$e^{-2mL} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

$$L = \frac{1}{2m}\ln\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)$$

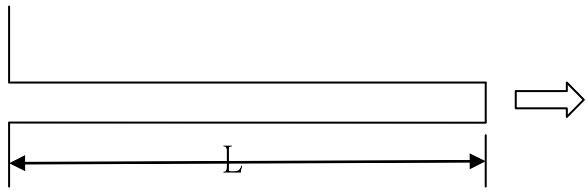
例，有一鰭片，已知 h=20 W/m^2-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，T_a=25℃，

T_b=100℃，若總熱傳量為無窮長鰭片的 95%，請計算其長度(18.1cm)與表面平均溫度(63.9℃)。

作業 4.4

有一端點絕熱方柱鰭片，邊長 5mm，h=100 W/m^2-℃，k=200 W/m-℃，T_a=25℃，T_b=100℃，若其熱傳量為無限長鰭片的 99%，請計算其長度與表面平均溫度。(0.132m, 53.1℃)

(ii). x=L, $-kA\dfrac{dT}{dx}=h(T-T_a)$，端點對流熱傳



$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

$x=0$，$T=T_b$

$$\theta = c_1 + c_2 = \theta_b$$

$x=L$，$-k\dfrac{d\theta}{dx}=h\theta$

$$-k(mc_1e^{mL} - mc_2e^{-mL}) = h(c_1e^{mL} + c_2e^{-mL})$$

$$c_1(km+h)e^{mL} = c_2e^{-mL}(km-h)$$

$$c_1 = c_2e^{-2mL}\frac{km-h}{km+h} = c_2e^{-2mL}\Phi$$

$$\Phi = \frac{km-h}{km+h} = \frac{km/h-1}{km/h+1}$$

$$c_1 + c_2 = c_2 e^{-2mL}\Phi + c_2 = c_2(1 + e^{-2mL}\Phi) = \theta_b$$

$$c_2 = \frac{\theta_b}{1 + \Phi e^{-2mL}}$$

$$c_1 = \frac{\Phi e^{-2mL}}{1 + \Phi e^{-2mL}}\theta_b$$

鰭片內的溫度分布為：

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{1}{1 + \Phi e^{-2mL}}(\Phi e^{-2mL} e^{mx} + e^{-mx})$$

端點溫度為：

$$\frac{\theta_e}{\theta_b} = \frac{e^{-mL}(\Phi + 1)}{1 + \Phi e^{-2mL}}$$

單位面積的熱傳量為：

$$\dot{q}'' = -k\frac{d\theta}{dx} = km\theta_b \frac{1 - \Phi e^{-2mL}}{1 + \Phi e^{-2mL}}$$

總熱傳量為：

$$\dot{Q}_L = w\sqrt{2hk\delta}\,\frac{1 - \Phi e^{-2mL}}{1 + \Phi e^{-2mL}}\theta_b$$

端點熱傳量為：

$$\dot{q}''_{end} = h\theta_e = h\frac{e^{-mL}(\Phi + 1)}{1 + \Phi e^{-2mL}}\theta_b$$

$\dfrac{\dot{Q}_L}{\dot{Q}_\infty} = \dfrac{1 - \Phi e^{-2mL}}{1 + \Phi e^{-2mL}} < 1$，與無限翼片總熱傳量之比值

若 $km >> h$ ，$\Phi \approx 1$，則 $\dfrac{\dot{Q}_L}{\dot{Q}_\infty} \approx \dfrac{1 - e^{-2mL}}{1 + e^{-2mL}}$ ，與 case 1 相同

$\boxed{\text{例}}$，有一端點對流熱傳的平板鰭片，已知 L=10 cm，h=20 W/m^2-℃，k=390

W/m-℃ ，δ=1mm，T_a=25℃ ，T_b=100℃ ，請計算單位寬度的熱傳量，端點溫度，端點熱傳量，表面平均溫度，與效益。

設定熱傳量：

$$\frac{\dot{Q}_L}{\dot{Q}_\infty}=\gamma \text{ ， } 1-\Phi e^{-2mL}=\gamma\cdot\left(1+\Phi e^{-2mL}\right)$$

$$1-\gamma=\Phi\left(1+\gamma\right)e^{-2mL} \text{ ， } e^{-2mL}=\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\Phi$$

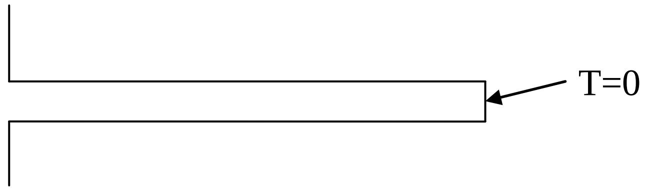
$$L=\frac{1}{2m}\ln\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\cdot\frac{1}{\Phi}\right)$$

例，有一端點對流熱傳的平板鰭片，已知 h=20 W/m^2-℃，k=390 W/m-℃ ，δ=1mm，T_a=25℃ ，T_b=100℃ ，若總熱傳量為無窮長鰭片的 95%，請計算其長度與表面平均溫度。

作業 4.5

有一圓柱鰭片，直徑 5mm，h=100 W/m^2-℃ ，k=200 W/m-℃，若其熱傳量為無限長鰭片的 99%，請計算其長度與表面平均溫度。

(iii). x=L，T=T$_a$，端點溫度為零



$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

$x = 0$ ，$T = T_b$

$$\theta = c_1 + c_2 = \theta_b$$

$x = L$ ，$\theta = c_1 e^{mL} + c_2 e^{-mL} = 0$

$$c_1 = -c_2 e^{-2mL}$$

$$c_1 + c_2 = c_2(1 - e^{-2mL}) = \theta_b$$

$$c_2 = \frac{\theta_b}{1 - e^{-2mL}}$$

$$c_1 = -\frac{e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}}\theta_b$$

鰭片內的溫度分布為：

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{1}{1 - e^{-2mL}}(-e^{-2mL} e^{mx} + e^{-mx})$$

單位面積的熱傳量為：

$$\dot{q}'' = -k\frac{d\theta}{dx} = km\theta_b \frac{1 + e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}} > km\theta_b$$

端點熱傳量為：

$$\dot{q}''_{end} = -k\frac{d\theta}{dx} = km\theta_b \frac{2e^{-mL}}{1 - e^{-2mL}}$$

總熱傳量為：

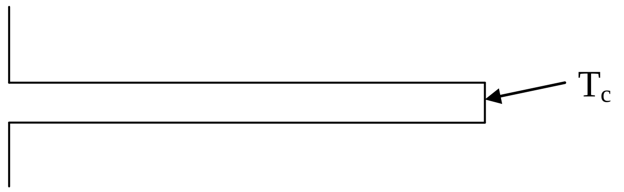
$$\dot{Q}_L = k\delta w m\theta_b \frac{e^{2mL}+1}{e^{2mL}-1} = \dot{Q}_\infty \frac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}} = \dot{Q}_\infty \frac{1}{X}$$

$\dfrac{\dot{Q}_L}{\dot{Q}_\infty} = \dfrac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}} = \dfrac{1}{X} > 1$，與無限翼片總熱傳量之比值

L 越短，熱傳量越大。這已不是散熱翼片，從端面傳走的熱量高於上下兩面傳走的熱量。

例，有一端點溫度為零的平板鰭片，已知 L=10 cm，h=20 W/m^2-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，T_a=25℃，T_b=100℃，請計算單位寬度的熱傳量，端點熱傳量，與效益。

(vi). x=L, T=T_c，端點溫度為任意設定值



$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

$x=0$ ，$T=T_b$

$$\theta = c_1 + c_2 = \theta_b$$

$x=L$ ，$\theta = c_1 e^{mL} + c_2 e^{-mL} = \theta_c$

$$c_1 = -c_2 e^{-2mL} + \theta_c e^{-mL}$$

$$c_1 + c_2 = c_2(1-e^{-2mL}) + \theta_c e^{-mL} = \theta_b$$

$$c_2 = \frac{\theta_b - \theta_c e^{-mL}}{1-e^{-2mL}}$$

$$c_1 = \theta_b - c_2 = \frac{-\theta_b e^{-2mL} + \theta_c e^{-mL}}{1-e^{-2mL}}$$

鰭片內的溫度分布為：

$$\theta = \frac{1}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[\left(\theta_c - \theta_b e^{-mL}\right)e^{mx} + \left(\theta_b e^{mL} - \theta_c\right)e^{-mx}\right]$$

單位面積的熱傳量為：

$$\dot{q}'' = -k\frac{m}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[\left(\theta_c - \theta_b e^{-mL}\right)e^{mx} - \left(\theta_b e^{mL} - \theta_c\right)e^{-mx}\right]$$

x=0, $\dot{q}_b'' = \frac{km}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[\theta_b\left(e^{mL} + e^{-mL}\right) - 2\theta_c\right] = km\left[\theta_b\frac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}} - \frac{2\theta_c e^{-mL}}{1-e^{-2mL}}\right]$

總熱傳量為：

$$\dot{Q}_b = kmwb\left(\frac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}\theta_b - \frac{2e^{-mL}}{1-e^{-2mL}}\theta_c\right) = kmwb\left(\frac{1}{X}\theta_b - Y\theta_c\right)$$

端點熱傳量為：

x=L, $\dot{q}_c'' = \frac{km}{e^{mL} - e^{-mL}}\left[2\theta_b - \theta_c\left(e^{mL} + e^{-mL}\right)\right] = km\left[\frac{2\theta_b e^{-mL}}{1-e^{-2mL}} - \theta_c\frac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}\right]$

$$\dot{Q}_c = \dot{q}''A = kmwb\left[\frac{2\theta_b e^{-mL}}{1-e^{-2mL}} - \theta_c\frac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}\right] = kmwb\left[Y\theta_b - \frac{1}{X}\theta_c\right]$$

$Y = \frac{2e^{-mL}}{1-e^{-2mL}}$ ， $X = \frac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}$

當 $\theta_c = 0$ 時，$\dot{Q}_b = \frac{e^{mL} + e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}}kmwb$ ，(iii)與(iv)相同。

例，有一平板鰭片，已知 L=10 cm，h=20 W/m^2-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，w=5cm，T_a=25℃ ，T_b=100℃ ，T_e=50℃ ，請計算熱傳量，端點熱傳量，平均溫度，與效益。(15.18W，5.96W, ，71℃ ，202)

四種邊界的單位寬度熱傳量，尖端溫度，與尖端熱傳量

	熱傳量 $(q''_b/km\theta_b)$	端點溫度 (θ_e/θ_b)	端點熱傳 $q''_e/km\theta_b$
端點絕熱	$\dfrac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$	$\dfrac{2e^{-mL}}{1+e^{-2mL}}$	0
端點對流	$\dfrac{1-\Phi e^{-2mL}}{1+\Phi e^{-2mL}}$	$\dfrac{e^{-mL}(\Phi+1)}{1+\Phi e^{-2mL}}$	$h\theta_b\dfrac{e^{-mL}(\Phi+1)}{1+\Phi e^{-2mL}}$
端點零溫	$\dfrac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}$	0	$\dfrac{2e^{-mL}}{1-e^{-2mL}}$
端點定溫	$\dfrac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}-\dfrac{\theta_c}{\theta_b}\dfrac{2e^{-mL}}{1-e^{-2mL}}$	$\dfrac{\theta_c}{\theta_b}$	$\dfrac{2e^{-mL}}{1-e^{-2mL}}-\dfrac{\theta_c}{\theta_b}\dfrac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}$

作業 4.6

有限長度的鰭片，請計算四種邊界的單位寬度熱傳量與尖端溫度。

T_a=25℃，T_b=100℃，h=200 W/m^2-℃，k=50 W/m-℃，δ=1mm，L=3cm

(1). 絕熱

(2). 對流

(3). T_e=25℃

(4). T_e=50℃

如何減少鰭片的重量？

數目

長度

厚度

形狀

材料

三、非等截面鰭片

(3.1). 非等截面鰭片理論模式

散熱鰭片規格

長度：L

寬度：w

底部厚度：b

端點厚度：

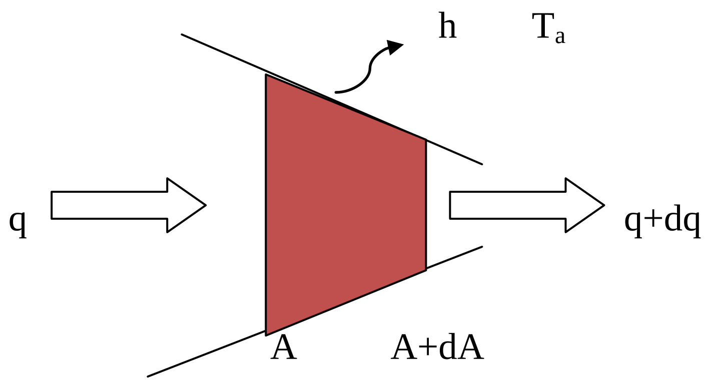
熱傳截面積：A

表面熱傳系數：h

周長：p

底部溫度：T_b

大氣溫度：T_a



左邊熱傳量(傳導)：qA

右邊熱傳量(傳導)：$(q+dq)(A+dA)$

四周熱傳量(對流)：$ph(T-T_a)dx$

能量平衡：左邊熱傳量(傳導)=右邊熱傳量(傳導)+四周熱傳量(對流)

$$qA = (q + dq)(A + dA) + ph(T - T_a)dx$$

$$qdA + Adq + ph(T - T_a)dx = 0$$

$$\frac{d}{dx}(qA) + ph(T - T_a) = 0$$

依據 Fourier's Law

$$q = -k\frac{dT}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(A\frac{dT}{dx}) - \frac{ph}{k}(T - T_a) = 0$$

$$\theta = T - T_a$$

$$\frac{d}{dx}(A\frac{d\theta}{dx}) - \frac{ph}{k}\theta = 0$$

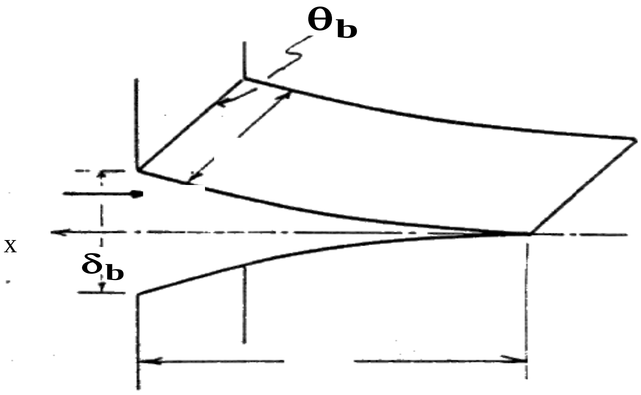
若熱傳截面積為固定值，則

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{ph}{kA}\theta = 0$$

令 $m^2 = \frac{ph}{kA} = \frac{2h}{k\delta}$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

(3.2). 拋物線鰭片



x=

b

x=a=0

鰭片的截面積為 $A = bW(\frac{x}{L})^2$

注意：坐標原點在拋物線尖端，而坐標方向為由尖端向基部，與平板鰭片不同。

$$\frac{d}{dx}(kbW(\frac{x}{L})^2\frac{dT}{dx}) - ph(T - T_a) = 0$$

$$p = 2(W + bW(\frac{x}{L})^2) \approx 2W$$

$$\frac{d}{dx}(x^2\frac{d\theta}{dx}) - \frac{2hL^2}{kb}\theta = 0 \text{ ， } m^2 = \frac{2h}{kb}$$

$$x^2\frac{d^2\theta}{dx^2} + 2x\frac{d\theta}{dx} - m^2L^2\theta = 0$$

$$\theta = x^s$$

$$s(s-1) + 2s - (mL)^2 = 0$$

$$\theta = c_1x^{s_1} + c_2x^{s_2}$$

$$s_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4m^2L^2}}{2} \text{ ， } s_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4m^2L^2}}{2}$$

其中 $s_1 > 0$ ， $s_2 < 0$

因在 $x=0$ (尖端處)，θ 為有限值，而 $x^{s_2}\to\infty$，故 $c_2=0$

在 $x=L$ (基部)，$\theta=\theta_b$，故 $c_1=\dfrac{\theta_b}{L^{s_1}}$

鰭片內的溫度分布為：

$$\frac{\theta}{\theta_b}=(\frac{x}{L})^{s1}$$

單位面積的熱傳量為：

$$q''=k\frac{d\theta}{dx}_{x=L}=k\theta_b\frac{S_1}{L}=\frac{k\theta_b}{L}\frac{\sqrt{1+4m^2L^2}-1}{2}$$

注意：坐標原點在拋物線尖端，熱傳方向與坐標方向相反。

$$q''=km\theta_b\frac{\sqrt{1+(2mL)^2}-1}{2mL}$$

總熱傳量為：

$$\dot{Q}=\frac{kbw\theta_b}{L}\frac{\sqrt{1+4m^2L^2}-1}{2}$$

非固定截面積鰭片的熱傳量較低，但可減少材料使用，降低重量。

$$M_{parabolic}=\int_0^L\rho b\left(\frac{x}{L}\right)^2wdx=\frac{1}{3}\rho bwL=\frac{1}{3}M_{plate}$$

拋物線形鰭片的重量只有平板狀鰭片的 1/3

$$\frac{q''_{parabolic}}{q''_{plate}}=\frac{\sqrt{1+\left(2mL\right)^2}-1}{2mL}\cdot\frac{1+e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}$$

$\boxed{\text{例}}$，請計算拋物線形，矩形的熱傳量與溫度分佈。

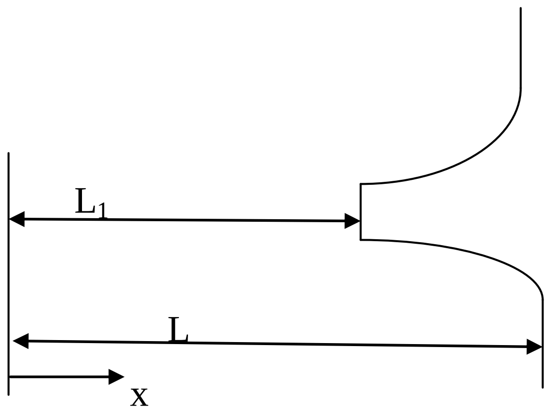
h=20 W/m^2-℃，k=200 W/m-℃，b=3mm，L=1cm，θ_b= 100℃

$h=200\ W/m^2$-℃，$k=50\ W/m$-℃，$b=3mm$，$L=3cm$，$\theta_b=100$℃

作業 4.7

有一平板鰭片，已知 $L=10\ cm$，$h=20\ W/m^2$-℃，$k=390\ W/m$-℃，$\delta=1cm$，$T_a=25$℃，$T_b=100$℃，請設計一拋物線形鰭片，具有相同的熱傳量。若二者的寬度與基部厚度相同，計算拋物線形鰭片的長度，並比較二者的重量。(10.7cm，35%炎庭)

半截的拋物線形鰭片



$$\theta = c_1 x^{s_1} + c_2 x^{s_2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = c_1 s_1 x^{s_1-1} + c_2 s_2 x^{s_2-1}$$

$$x = L_1(\text{前端處})，\frac{d\theta}{dx} = 0$$

$$c_1 s_1 (L_1)^{s_1-1} + c_2 s_2 (L_1)^{s_2-1} = 0$$

$$c_1 = -c_2 \frac{s_2 (L_1)^{s_2-1}}{s_1 (L_1)^{s_1-1}}$$

$$x = L(\text{基部})，\theta = \theta_b$$

$$\theta_b = c_1 L^{s_1} + c_2 L^{s_2} = -c_2 \frac{s_2 (L_1)^{s_2-1}}{s_1 (L_1)^{s_1-1}} L^{s_1} + c_2 L^{s_2} = c_2 \left(L^{s_2} - \frac{s_2}{s_1} (L_1)^{s_2-s_1} L^{s_1} \right)$$

$$c_2 = \frac{\theta_b}{L^{s_2}\left(1 - \frac{s_2}{s_1}(\frac{L_1}{L})^{s_2-s_1}\right)} \text{，} c_1 = -\frac{\theta_b}{L^{s_2}\left(1 - \frac{s_2}{s_1}(\frac{L_1}{L})^{s_2-s_1}\right)} \frac{s_2}{s_1}(L_1)^{s_2-s_1}$$

鰭片內的溫度分布為：

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{1}{\left(1 - \frac{s_2}{s_1}(\frac{L_1}{L})^{s_2-s_1}\right)} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^{s_2} - \frac{s_2}{s_1}\left(\frac{x}{L}\right)^{s_1} \left(\frac{L_1}{L}\right)^{S_2-S_1} \right]$$

單位面積的熱傳量為：

$$q'' = k \frac{d\theta}{dx}_{x=L} = \frac{k\theta_b}{L} \frac{s_2}{\left(1 - \frac{s_2}{s_1}(\frac{L_1}{L})^{s_2-s_1}\right)} \left[1 - \left(\frac{L_1}{L}\right)^{s_2-s_1} \right]$$

總熱傳量為：

$$\dot{Q} = -\frac{kbw\theta_b}{L} \frac{\sqrt{1+4m^2L^2}-1}{2} \frac{1 - \left(\frac{L_1}{L}\right)^{s_2-s_1}}{\left(1 - \frac{s_2}{s_1}(\frac{L_1}{L})^{s_2-s_1}\right)}$$

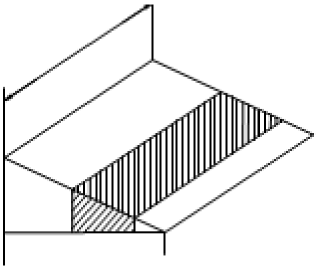
例，請計算半截式拋物線形鰭片的熱傳量與溫度分佈。

h=20 W/m^2-℃ ，k=200 W/m-℃ ，b=3mm，L=1cm，L_1=0.8cm， θ_b= 100℃

作業 4.8

有一拋物線形鰭片，已知 h=20 W/m^2-℃，k=390 W/m-℃，b=1cm，L=10cm，L_1=7cm， θ_b= 100℃ ，若改為半截式拋物線形鰭片 ，二者的寬度，基部厚度，及總長度都相同，請比較二者的熱傳量及重量。

(3.3). 三角鰭片



鰭片的截面積為 $A = bW\frac{x}{L}$

注意：坐標原點在拋物線尖端，而坐標方向為由尖端向基部。

$$\frac{d}{dx}(kbW\frac{x}{L}\frac{dT}{dx}) - ph(T - T_a) = 0$$

$$p = 2(W + b\frac{x}{L}) \approx 2W$$

$$\frac{d}{dx}(x\frac{d\theta}{dx}) - \frac{2hL}{kb}\theta = 0 \text{ ， } m^2 = \frac{2h}{kb}$$

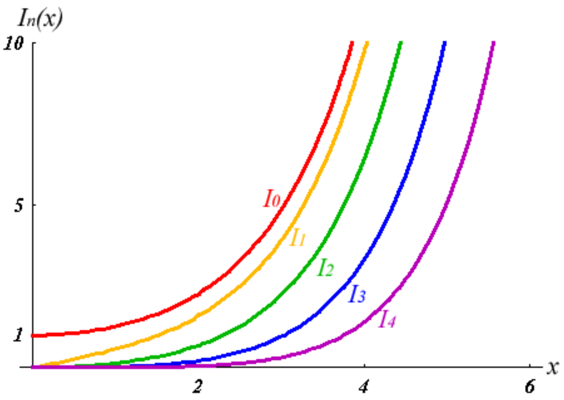
$$x\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} - m^2 L\theta = 0$$

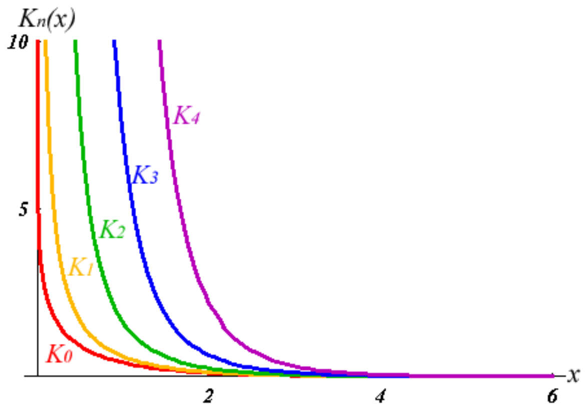
該方程式的解為

$$\theta = c_1 I_0(2m\sqrt{Lx}) + c_2 K_0(2m\sqrt{Lx})$$

其中 $I_0(2m\sqrt{Lx})$ 與 $K_0(2m\sqrt{Lx})$ 為 第零階的 Modified Bessel's function

Modified Bessel's function 的函數圖形如下：





Modified Bessel's function 的性質：

$x = 0$

$I_0 = 1$，$I_1 = 0$，$I_2 = 0$，$I_3 = 0$

$K_0 \to \infty$，$K_1 \to \infty$，$K_2 \to \infty$，$K_3 \to \infty$

$x \to \infty$

$I_0 \to \infty$，$I_1 \to \infty$，$I_2 \to \infty$，$I_3 \to \infty$

$K_0 = 0$，$K_1 = 0$，$K_2 = 0$，$K_3 = 0$

$$\frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x)$$

$$\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x)$$

x	$K_0(x)$	$K_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$
0	∞	∞	1	0
0.1	2.427069025	9.853844781	1.002501563	0.05006252605
0.2	1.752703856	4.775972543	1.010025028	0.100500834
0.3	1.372460061	3.055992033	1.022626879	0.15169384
0.4	1.114529135	2.184354425	1.040401782	0.2040267557
0.5	0.924419071	1.65644112	1.063483371	0.2578943054
0.6	0.777522092	1.30283494	1.092045364	0.3137040256
0.7	0.66051986	1.050283535	1.126303018	0.3718796778
0.8	0.5653471053	0.8617816345	1.166514923	0.4328648026
0.9	0.4867303082	0.7165335788	1.212985166	0.4971264482
1	0.4210244382	0.6019072302	1.266065878	0.565159104
1.1	0.3656023915	0.5097600272	1.326160184	0.637488876
1.2	0.3185082203	0.4345923911	1.393725584	0.7146779416
1.3	0.2782476463	0.3725474956	1.469277798	0.797329315
1.4	0.2436550612	0.3208359022	1.5533951	0.8860919814
1.5	0.2138055626	0.2773878005	1.64672319	0.9816664286
1.6	0.187954752	0.2406339114	1.74998064	1.084810635
1.7	0.1654963181	0.2093624882	1.863964962	1.196346566
1.8	0.1459314005	0.1826230998	1.989559357	1.31716723
1.9	0.1288459793	0.159660153	2.127740194	1.448244373
2	0.1138938727	0.1398658818	2.279585302	1.590636855
2.1	0.1007837409	0.1227464115	2.44628313	1.745499809
2.2	0.0892690057	0.1078968101	2.629142864	1.914094651
2.3	0.079139933	0.0949824438	2.8296056	2.097800028
2.4	0.0702173415	0.0837248388	3.049256658	2.298123813
2.5	0.0623475532	0.0738908163	3.289839144	2.516716245
2.6	0.05539830329	0.06528404506	3.553268904	2.755384341
2.7	0.04925540092	0.05773839896	3.841650977	3.016107693
2.8	0.04381998198	0.05111268561	4.157297704	3.301055823
2.9	0.03900623457	0.0452864233	4.502748661	3.612607212
3	0.03473950439	0.04015643113	4.88079259	3.953370217
3.1	0.03095470804	0.03563405495	5.29449149	4.326206027
3.2	0.02759499768	0.03164289521	5.747207187	4.73425389
3.3	0.02461063215	0.02811693427	6.242630465	5.180958855
3.4	0.02195801881	0.02499898412	6.78481316	5.67010219
3.5	0.01959889717	0.02223939293	7.37820343	6.205834922
3.6	0.01749964102	0.01979496202	8.027684547	6.792714601
3.7	0.01563065992	0.0176280351	8.738617524	7.435745797
3.8	0.01396588453	0.01570572908	9.51688803	8.14042458
3.9	0.01248232276	0.01399928208	10.36895792	8.912787451
4	0.01115967609	0.01248349889	11.30192195	9.759465154
4.1	0.009980007228	0.01113627763	12.32357012	10.68774184
4.2	0.008927451542	0.009938204736	13.44245616	11.70562014
4.3	0.007987966032	0.008872207189	14.66797299	12.8218928
4.4	0.007149110623	0.007923253361	16.01043552	14.04622134
4.5	0.006399857243	0.007078094909	17.48117186	15.38922275

$x=0$，θ 為有限值，但 $K_0(0)\to\infty$，故 $c_2=0$

$$\theta=c_1 I_0(2m\sqrt{Lx})$$

$x=L$，$\theta=\theta_b$，$c_1=\dfrac{\theta_b}{I_0(2mL)}$

鰭片內的溫度分布為：

$$\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{I_0(2m\sqrt{Lx})}{I_0(2mL)}$$

$$\frac{dI_0(x)}{dx}=I_1(x)$$

單位面積的熱傳量為：

$$q''=k\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L}=k\frac{d\theta}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=k2m\sqrt{L}\frac{1}{2}\frac{\theta_b}{\sqrt{x}}\frac{I_1(2m\sqrt{Lx})}{I_0(2mL)}=km\theta_b\frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

總熱傳量為：

$$\dot{Q}=bWq''=\sqrt{\frac{2kh}{b}}\theta_b\frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

鰭片效益為：

$$\varepsilon=\frac{q''}{h\theta_b}=\frac{km}{h}\frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

三角形鰭片的熱傳量較低，但可減少材料使用，降低重量。

$$M_{triangular}=\int_0^L \rho b\frac{x}{L}wdx=\frac{1}{2}\rho bwL=\frac{1}{2}M_{plate}$$

三角形鰭片的重量只有平板狀鰭片的 1/2

$\boxed{\text{例}}$，請計算三角形鰭片的熱傳量與溫度分佈。

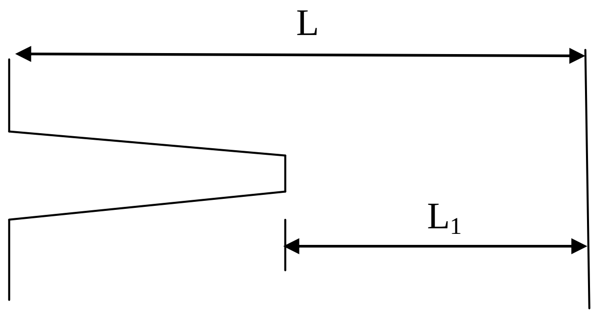
h=20 W/m^2-℃，k=200 W/m-℃，b=3mm，L=1cm，θ_b= 100℃

h=200 W/m^2-℃，k=50 W/m-℃，b=3mm，L=3cm，θ_b= 100℃

作業 4.9

有一三角鰭片，已知 L=10 cm，h=20 W/m^2-℃，k=200 W/m-℃，δ=1cm，T_a=25℃，T_b=100℃，請設計一平板鰭片，具有相同的熱傳量。若二者的寬度與基部厚度相同，計算平板鰭片的長度，並比較二者的重量。(9.745cm, 1.95 倍柏源)

半截的三角形鰭片(去除尖端)



$$\theta = c_1 I_0(2m\sqrt{Lx}) + c_2 K_0(2m\sqrt{Lx})$$

$$\frac{d\theta}{dx} = c_1 m\sqrt{L}\frac{1}{\sqrt{x}} I_1(2m\sqrt{Lx}) - c_2 m\sqrt{L}\frac{1}{\sqrt{x}} K_1(2m\sqrt{Lx})$$

$$x = L_1,\ \frac{d\theta}{dx} = c_1 m\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L_1}} I_1(2m\sqrt{LL_1}) - c_2 m\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L_1}} K_1(2m\sqrt{LL_1}) = 0$$

$$c_1 = c_2 \frac{K_1(2m\sqrt{LL_1})}{I_1(2m\sqrt{LL_1})}$$

$x = L$ ， $\theta = \theta_b = c_2 \dfrac{K_1(2m\sqrt{LL_1})}{I_1(2m\sqrt{LL_1})} I_0(2mL) + c_2 K_0(2mL)$ ，

$$c_2 = \frac{\theta_b}{\dfrac{K_1(2m\sqrt{LL_1})}{I_1(2m\sqrt{LL_1})} I_0(2mL) + K_0(2mL)}$$

$$c_1 = \frac{\theta_b}{\dfrac{K_1(2m\sqrt{LL_1})}{I_1(2m\sqrt{LL_1})} I_0(2mL) + K_0(2mL)} \frac{K_1(2m\sqrt{LL_1})}{I_1(2m\sqrt{LL_1})}$$

鰭片內的溫度分布為：

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\dfrac{K_1(2m\sqrt{LL_1})}{I_1(2m\sqrt{LL_1})} I_0(2m\sqrt{Lx}) + K_0(2m\sqrt{Lx})}{\dfrac{K_1(2m\sqrt{LL_1})}{I_1(2m\sqrt{LL_1})} I_0(2mL) + K_0(2mL)}$$

單位面積的熱傳量為：

$$q'' = k \frac{d\theta}{dx}_{x=L} = km\theta_b \frac{\dfrac{K_1(2m\sqrt{LL_1})}{I_1(2m\sqrt{LL_1})} I_1(2mL) - K_1(2mL)}{\dfrac{K_1(2m\sqrt{LL_1})}{I_1(2m\sqrt{LL_1})} I_0(2mL) + K_0(2mL)}$$

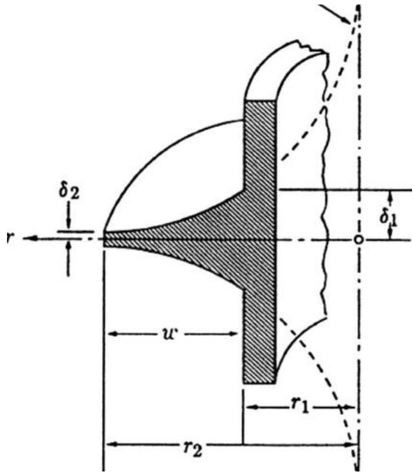
$$= km\theta_b \frac{K_1(2m\sqrt{LL_1}) I_1(2mL) - K_1(2mL) I_1(2m\sqrt{LL_1})}{K_1(2m\sqrt{LL_1}) I_0(2mL) + K_0(2mL) I_1(2m\sqrt{LL_1})}$$

例，請計半截式三角形鰭片的熱傳量與溫度分佈。

h=40 W/m^2-℃ ，k=200 W/m-℃ ，b=3mm，L=1cm，L_1=0.8cm， θ_b= 100℃

$\boxed{\text{作業 4.10}}$有一三角形鰭片，已知 h=40 W/m^2-℃，k=200 W/m-℃，b=3mm，L=1cm，θ_b= 100℃，若改為半截式三角形鰭片，二者的寬度，基部厚度，及總長度都相同，請比較二者的熱傳量及重量。

(3.4). 環狀鰭片



$$\frac{d}{dr}(A\frac{dT}{dr})-\frac{ph}{k}\theta=0$$

$A=2\pi r\delta$ ， $p\approx 4\pi r$

$$\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr})-\frac{2hr}{k\delta}\theta=0$$

$$m^2=\frac{2h}{k\delta}$$

$$\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr})-m^2 r\theta=0$$

該方程式之解為

$$\theta=c_1 I_0(mr)+c_2 K_0(mr)$$

其中 $I_0(mr)$ 與 $K_0(mr)$ 為 第零階的 Modified Bessel's function

(3.4.1). 無限大的環形翼片

$r\to\infty$ ， $\theta=0$ ， $c_1=0$

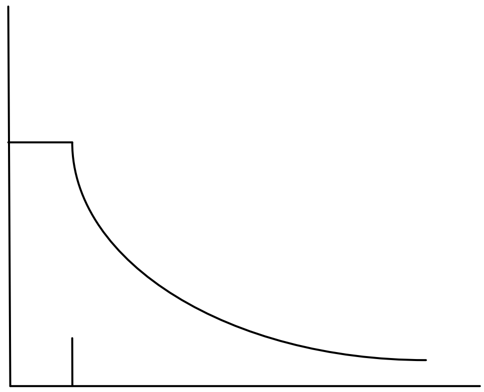
$r=r_i$ ， $\theta=\theta_b$ ， $\theta_b=c_2 K_0(mr_i)$

$$c_2=\frac{\theta_b}{K_0(mr_i)}$$

溫度分布：

$$\theta=\theta_b\frac{K_0(mr)}{K_0(mr_i)}$$

溫度分布與K_0的函數形狀一樣。



總熱傳量：

$$\frac{dK_0(x)}{dx}=-K_1(x)\ ,\ \frac{dI_0(x)}{dx}=I_1(x)$$

$$\dot{Q}_\infty=-2\pi r_i\delta k\left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r=r_0}=2\pi r_i\delta km\theta_b\frac{K_1(mr_i)}{K_0(mr_i)}$$

鰭片效益：

$$\varepsilon=\frac{\dot{Q}_\infty}{2\pi r_i\delta h\theta_b}=\frac{km}{h}\frac{K_1(mr_i)}{K_0(mr_i)}$$

例，請計算無限大環形鰭片的熱傳量與溫度分佈。

h=20 W/m^2-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，r_0=1cm，θ_b= 100℃

m=10.127，mr_0=0.1013，$K_0(mr_0)=2.4143$，$K_1(mr_0)=9.7243$

$\dot{Q}_\infty=99982$ W，ε =795

h=200 W/m^2-℃，k=50 W/m-℃，δ=1mm，r_0=3cm，θ_b= 100℃

m=89.443，mr_0=2.6833，$K_0(mr_0)=0.0502$，$K_1(mr_0)=0.0589$

$\dot{Q}_\infty=771483$ W，ε =205

(3.4.2). 有限半徑的環形鰭片(假設邊緣絕熱)

$r=r_i$ ， $\theta_b=c_1I_0(mr_i)+c_2K_0(mr_i)$

$r=r_o$ ， $\dfrac{d\theta}{dr}=c_1mI_1(mr_o)-c_2mK_1(mr_o)=0$ ， $c_1=\dfrac{K_1(mr_o)}{I_1(mr_o)}c_2$

其中$I_1(mr)$與$K_1(mr)$為 第一階的 Modified Bessel's function

$$\theta_b=\left[\frac{K_1(mr_o)}{I_1(mr_o)}I_0(mr_i)+K_0(mr_i)\right]c_2$$

$$c_2=\frac{I_1(mr_o)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o)+K_0(mr_i)I_1(mr_o)}\theta_b$$

$$c_1=\frac{K_1(mr_o)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o)+K_0(mr_i)I_1(mr_o)}\theta_b$$

溫度分布：

$$\theta=\frac{K_1(mr_o)I_0(mr)+I_1(mr_o)K_0(mr)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o)+K_0(mr_i)I_1(mr_o)}\theta_b$$

熱傳量：

$$\frac{d\theta}{dr}=\frac{mK_1(mr_o)I_1(mr)-mI_1(mr_o)K_1(mr)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o)+K_0(mr_i)I_1(mr_o)}\theta_b$$

$$q''=-k\left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r=r_i}=-km\theta_b\frac{K_1(mr_o)I_1(mr_i)-I_1(mr_o)K_1(mr_i)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o)+K_0(mr_i)I_1(mr_o)}$$

$$\dot{Q}=2\pi r_i\delta q''=2\pi r_i\delta km\theta_b\frac{-K_1(mr_o)I_1(mr_i)+I_1(mr_o)K_1(mr_i)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o)+K_0(mr_i)I_1(mr_o)}=\alpha\dot{Q}_\infty$$

$\alpha=\dfrac{\dot{Q}}{\dot{Q}_\infty}$ 為實際熱傳與無窮大環熱傳之比值。

$$\alpha=\frac{K_0(mr_i)}{K_1(mr_i)}\cdot\frac{I_1(mr_o)K_1(mr_i)-K_1(mr_o)I_1(mr_i)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o)+K_0(mr_i)I_1(mr_o)}$$

鰭片效益：

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{2\pi r_i \delta h \theta_b} = \frac{km}{h} \frac{I_1(mr_o)K_1(mr_i) - K_1(mr_o)I_1(mr_i)}{I_1(mr_o)K_0(mr_i) + K_1(mr_o)I_0(mr_i)}$$

面積比 $AR = \dfrac{2\pi\left(r_o^2 - r_i^2\right)}{2\pi r_i \delta} = \dfrac{r_o^2 - r_i^2}{r_i \delta}$

例，請計算有限半徑環形鰭片的熱傳量與溫度分佈。

h=20 W/m^2-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，r_0=1cm，r_1=10cm，θ_b= 100℃

m=10.127，mr_0=0.1013，mr_1=1.0127

$K_0(mr_0) = 2.4143$，$K_1(mr_0) = 9.7243$，$I_0(mr_0) = 1.0026$，$I_1(mr_0) = 0.0507$

$K_0(mr_1) = 0.4135$，$K_1(mr_1) = 0.5891$，$I_0(mr_1) = 1.2733$，$I_1(mr_1) = 0.5741$

α =0.6974，$\dot{Q} = 70$ W，ε =555，AR = 990

例，請計算計算 r_o，使$\varepsilon = 50$。

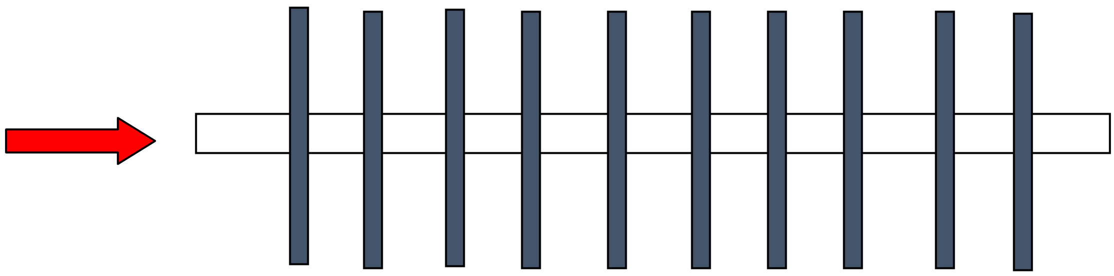
h=20 W/m^2-℃，k=390 W/m-℃，δ=1mm，r_0=1cm，θ_b= 100℃

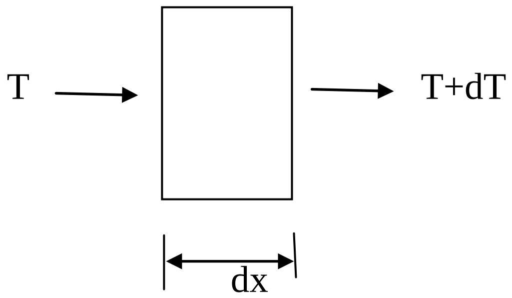
作業 4.12

有一金屬圓棒，k=390 W/m-℃，直徑 2 cm，長度 50 cm，中間有三個等間隔的環型鰭片，外徑 20 cm，厚度 1 mm，若金屬棒內部有一均勻熱源，功率為 70 W，已知金屬棒表面的熱傳系數為 20 W/m^2-℃，大氣溫度為 25℃，請計算金屬棒表面溫度。

例，有一銅管，內徑 1.8 cm，外徑 2 cm，長度 1 m，中間有十個等間隔的環型鰭片，外徑 20 cm，厚度 1 mm，若銅管入口為 80℃的熱水，流速 0.01

m/s，已知銅管內壁的熱傳係數為 200 W/m^2-℃，銅管表面的熱傳係數為 20 W/m^2-℃，大氣溫度為 25℃，請計算流出銅管的水溫。





能量平衡

$$\dot{m}cT = \dot{m}c(T + dT) + h2\pi R dx(T - T_w)$$

$$\dot{m}c\frac{dT}{dx} + h2\pi R(T - T_w) = 0$$

$$\theta = T - T_w =$$

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{h2\pi R}{\dot{m}c}\theta = 0$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{h2\pi R}{\dot{m}c}$$

$$\frac{d\theta}{dx}+\frac{\theta}{\lambda}=0$$

$$\theta=ce^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$x=0$ ， $T=T_i$ ， $\theta=T_i-T_w=\theta_i$

$$c=\theta_i$$

$$\frac{\theta}{\theta_i}=e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$$\frac{T-T_w}{T_i-T_w}=e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$x=L$ ， $T=T_e$ ， $\theta=T_e-T_w=\theta_e$

$$\frac{T_e-T_w}{T_i-T_w}=e^{-\frac{L}{\lambda}}$$

$$T_e-T_w=(T_i-T_w)e^{-\frac{L}{\lambda}}$$

$$T_e=T_w+(T_i-T_w)e^{-\frac{L}{\lambda}}$$

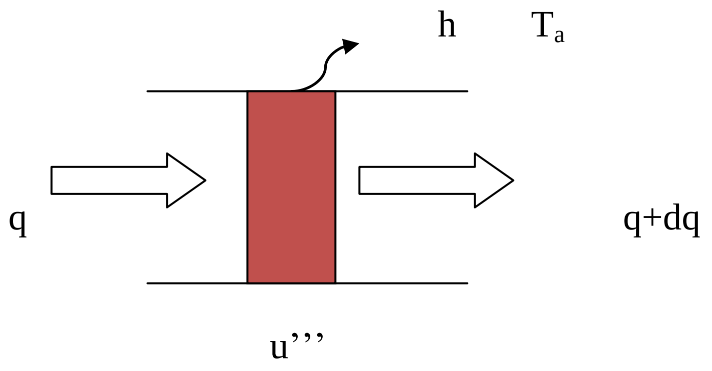
$$T_e-T_i=T_w-T_i+(T_i-T_w)e^{-\frac{L}{\lambda}}=(T_w-T_i)(1-e^{-\frac{L}{\lambda}})$$

各種鰭片的比較

	熱通量 $\dot{q}''$ (W/m^2)	端點溫度
無窮大板狀鰭片	$km\theta_b$	0
板狀鰭片	$km\theta_b\dfrac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$	$\dfrac{\theta_e}{\theta_b}=\dfrac{2e^{-mL}}{1+e^{-2mL}}$
拋物線鰭片	$km\theta_b\dfrac{\sqrt{1+(2mL)^2}-1}{2mL}$	0
三角形鰭片	$km\theta_b\dfrac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$	$\dfrac{\theta_e}{\theta_b}=\dfrac{1}{I_0(2mL)}$
無窮大環形鰭片	$km\theta_b\dfrac{K_1(mr_0)}{K_0(mr_0)}$	0
環形鰭片	$km\theta_b\dfrac{-K_1(mr_o)I_1(mr_i)+I_1(mr_o)K_1(mr_i)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o)+K_0(mr_i)I_1(mr_o)}$	$\dfrac{K_1(mr_o)I_0(mr_o)+I_1(mr_o)K_0(mr_o)}{I_0(mr_i)K_1(mr_o)+K_0(mr_i)I_1(mr_o)}$

四、有熱源的鰭片

(4.1). 內部熱源等截面散熱鰭片性能分析



左邊熱傳量(傳導)：qA

右邊熱傳量(傳導)：$(q+dq)A$

四周熱傳量(對流)：$ph(T-T_a)dx$

內部發熱量：$u'''Adx$

能量平衡:左邊熱傳量(傳導)+內部發熱量=右邊熱傳量(傳導)+四周熱傳量(對流)

$$qA+u'''Adx=(q+dq)A+ph(T-T_a)dx$$

$$Adq+ph(T-T_a)dx=u'''Adx$$

$$\frac{dq}{dx}+\frac{ph}{A}(T-T_a)=u'''$$

依據 Fourier’s Law

$$q=-k\frac{dT}{dx}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{ph}{Ak}(T-T_a)+\frac{u'''}{k}=0$$

$$\theta=T-T_a$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta + \frac{u'''}{k} = 0$$

該方程式之解為

$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} + \frac{1}{m^2}\frac{u'''}{k}$$

其中c_1與c_2由邊界條件決定。

令 $\theta_m = \frac{1}{m^2}\frac{u'''}{k} = \frac{Ak}{ph}\frac{u'''}{k} = \frac{Au'''}{ph}$

該方程式之解為

$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} + \theta_m$$

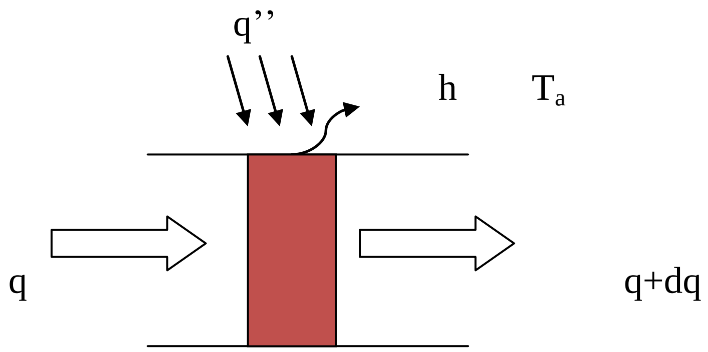
若無管內熱傳導，所有內部熱源都由表面散失，則

$$m^2\theta = \frac{u'''}{k}$$

$$\theta = \frac{1}{m^2}\frac{u'''}{k} = \theta_m$$

此時表面溫度即為θ_m

若是熱源來自表面，其模式為：



左邊熱傳量(傳導)： qA

右邊熱傳量(傳導)： $(q+dq)A$

四周熱傳量(對流)： $ph(T-T_a)dx$

表面熱傳量： $q''pdx$

能量平衡：左邊熱傳量(傳導)+ 表面熱傳量=右邊熱傳量(傳導)+四周熱傳量(對流)

$$qA+q''pdx=(q+dq)A+ph(T-T_a)dx$$

$$Adq+ph(T-T_a)dx=q''pdx$$

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{ph}{Ak}(T-T_a)+\frac{q''p}{Ak}=0$$

$$\frac{q''p}{Ak}=\frac{ph}{Ak}\frac{q''}{h}=m^2\theta_R$$

$$\theta_R=\frac{q''}{h}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta+m^2\theta_R=0$$

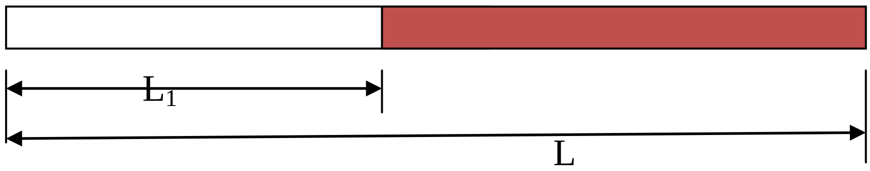
該方程式之解為

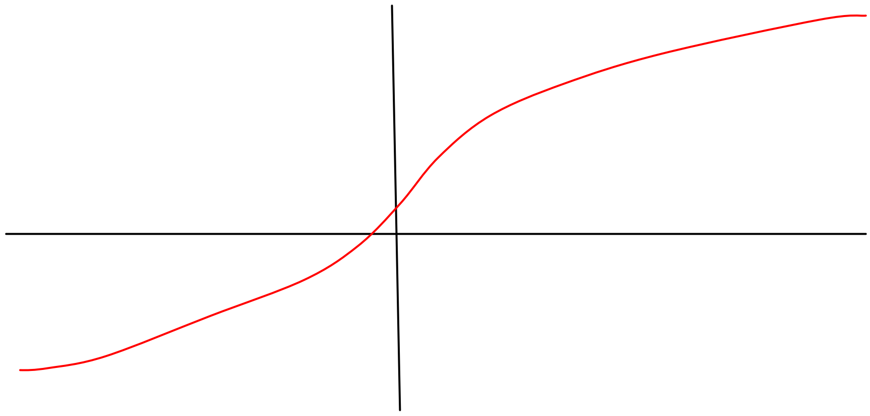
$$\theta=c_1e^{mx}+c_2e^{-mx}+\theta_R$$

故不論是內部熱源或表面熱源，能量平衡方程式都一樣，方程式之解也都一樣，只是θ_m或θ_R的定義不同。

(4.2). 圓管溫控(內部熱源)

在管內加熱，使整隻管子的溫度均勻一致。





$$m^2 = \frac{hp}{kA} = \frac{4h}{kd}$$

若部分管子加熱

$0 \le x < L_1$, $\dot{u}''' = 0$, $\theta = \theta_1$

$$\frac{d^2\theta_1}{dx^2} - m^2\theta_1 = 0$$

$$\theta_1 = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

$L_1 \le x < L$, $\dot{u}''' = \dot{S}$, $\theta = \theta_2$

$$\theta_2 = c_3 e^{mx} + c_4 e^{-mx} + \theta_m$$

兩端絕熱

$$x=0,\ \frac{d\theta_1}{dx}=0$$

$$x=L,\ \frac{d\theta_2}{dx}=0$$

接合處的溫度與熱傳量相同

$$x=L_1,\ \theta_1=\theta_2,\ \frac{d\theta_1}{dx}=\frac{d\theta_2}{dx}$$

$$x=0,\ \frac{d\theta_1}{dx}=mc_1e^{mx}-mc_2e^{-mx}=mc_1-mc_2=0,\ c_1=c_2$$

$$x=L,\ \frac{d\theta_2}{dx}=mc_3e^{mL}-mc_4e^{-mL}=0,\ c_3=c_4e^{-2mL}$$

$$x=L_1,\ \theta_1=c_1e^{mL_1}+c_2e^{-mL_1}=\theta_2=c_3e^{mL_1}+c_4e^{-mL_1}+\theta_m$$

$$c_1e^{mL_1}+c_1e^{-mL_1}=c_4e^{-2mL}e^{mL_1}+c_4e^{-mL_1}+\theta_m$$

$$c_1=\frac{c_4e^{-2mL}e^{mL_1}+c_4e^{-mL_1}+\theta_m}{e^{mL_1}+e^{-mL_1}}$$

$$x=L_1,\ mc_1e^{mL_1}-mc_2e^{-mL_1}=mc_3e^{mL_1}-mc_4e^{-mL_1}$$

$$c_1e^{mL_1}-c_1e^{-mL_1}=c_4e^{-2ml}e^{mL_1}-c_4e^{-mL_1}$$

$$c_1=c_4\frac{e^{-2ml}e^{mL_1}-e^{-mL_1}}{e^{mL_1}-e^{-mL_1}}=c_4\frac{e^{-2ml}-e^{-2mL_1}}{1-e^{-2mL_1}}$$

$$c_4\frac{e^{-2mL}+e^{-2mL_1}}{1+e^{-2mL_1}}+\frac{\theta_m}{e^{mL_1}+e^{-mL_1}}=c_4\frac{e^{-2ml}-e^{-2mL_1}}{1-e^{-2mL_1}}$$

$$c_4\left(\frac{e^{-2ml}-e^{-2mL_1}}{1-e^{-2mL_1}}-\frac{e^{-2mL}+e^{-2mL_1}}{1+e^{-2mL_1}}\right)=2c_4e^{-2mL_1}\frac{e^{-2ml}-1}{1-e^{-4mL_1}}=\frac{\theta_me^{-mL_1}}{1+e^{-2mL_1}}$$

$$c_4=-\frac{1}{2}\theta_me^{mL_1}\frac{1-e^{-2mL_1}}{1-e^{-2mL}}$$

$$c_3=-\frac{1}{2}\theta_me^{mL_1}e^{-2mL}\frac{1-e^{-2mL_1}}{1-e^{-2mL}}$$

$$c_1=\frac{1}{2}\theta_m e^{mL_1}\frac{e^{-2mL_1}-e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}=c_2$$

溫度分布為

$$\frac{\theta_1}{\theta_m}=\frac{1}{2}e^{mL_1}\frac{e^{-2mL_1}-e^{-2mL}}{1-e^{-2mL}}(e^{mx}+e^{-mx})=\frac{1}{2}e^{-mL_1}\frac{1-e^{-2m(L-L_1)}}{1-e^{-2mL}}(e^{mx}+e^{-mx})$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_m}=1-\frac{1}{2}e^{mL_1}\frac{1-e^{-2mL_1}}{1-e^{-2mL}}\left(e^{-2mL}e^{mx}+e^{-mx}\right)$$

最高溫：$\dfrac{\theta_{\max}}{\theta_m}=1-e^{-m(L-L_1)}\dfrac{1-e^{-2mL_1}}{1-e^{-2mL}}$

最低溫：$\dfrac{\theta_{\min}}{\theta_m}=e^{-mL_1}\dfrac{1-e^{-2m(L-L_1)}}{1-e^{-2mL}}$

若 $L_1=\dfrac{1}{2}L$

最高溫：$\dfrac{\theta_{\max}}{\theta_m}=1-\dfrac{e^{-mL/2}}{1+e^{-mL}}$

最低溫：$\dfrac{\theta_{\min}}{\theta_m}=\dfrac{e^{-mL/2}}{1+e^{-mL}}$

$\boxed{\text{例}}$，鋁管內部加熱

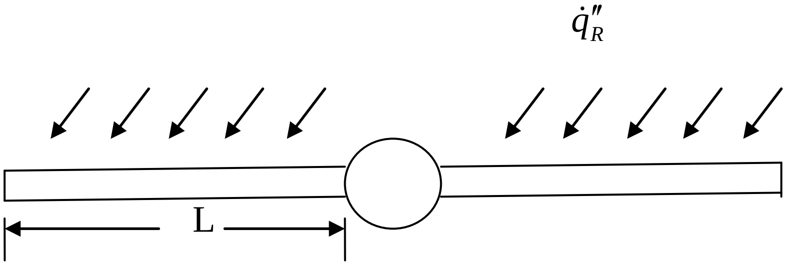
h=20 W/m^2-°C，L=50cm，L_1=10cm，d=10 cm，S=350 W，k=200 W/m-℃

$\dot{u}'''=\dfrac{S}{V}=\dfrac{4S}{\pi d^2(L-L_1)}$ = 111408 W/m^3

$m^2=\dfrac{hp}{kA}=\dfrac{4h}{kd}$ = 4，m=2

(4.3). 太陽能熱水器(表面熱源)

太陽能熱水器的吸熱板受到陽光照射，同時向四周的環境散熱，而中間流道的水管也會帶走一部份的熱量。



$$kA\frac{d^2T}{dx^2} - ph(T - T_a) + \dot{q}''_R p = 0$$

吸收板只有單面吸熱，單面散熱。另一面以絕熱材料包覆。

$A = w\delta$ ， $p = w$

$\theta = T - T_a$

$$m^2 = \frac{h}{k\delta}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta + m^2\theta_R = 0$$

$\theta_R = \dfrac{\dot{q}''_R}{h}$ ：日照平衡溫度，在固定日照強度下，吸收板的最高溫度。

該方程式的解為

$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} + \theta_R$$

x=0, $\theta = \theta_b$

x=L, $\dfrac{dT}{dx} = 0$ ，絕熱端

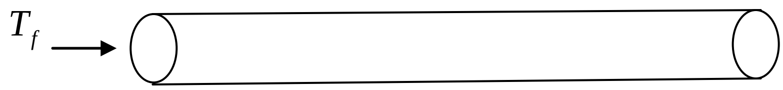
$$\theta = (\theta_b - \theta_R)\frac{1}{1+e^{-2mL}}(e^{-2mL}e^{mx} + e^{-mx}) + \theta_R$$

$$\frac{\theta - \theta_R}{\theta_b - \theta_R} = \frac{e^{-2mL}e^{mx} + e^{-mx}}{1+e^{-2mL}}$$

$$\dot{q}'_b = -k\delta m(\theta_b - \theta_R)\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}} = k\delta m(\theta_R - \theta_b)\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$$

$\theta_b < \theta_R$ 是太陽能吸收板能吸熱的必要條件。當 $\theta_b = \theta_R$時，已無淨熱傳量，此為太陽能吸收板所能達到的最高溫度。

管內水溫變化為



$$\dot{m}_f c_f \frac{dT_f}{dx} = 2\pi R_f h_f (T_b - T_f)$$

$$2\pi R_f h_f (T_b - T_f) = 2\dot{q}' = -2k\delta m(\theta_b - \theta_R)\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$$

$$(2\pi R_f h_f + 2k\delta m\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}})T_b = 2\pi R_f h_f T_f + 2k\delta m(T_a + \theta_R)\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$$

$$T_b = \frac{\pi R_f h_f}{\pi R_f h_f + k\delta m \frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}} T_f + \frac{k\delta m \frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}}{\pi R_f h_f + k\delta m \frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}} (T_a + \theta_R)$$

$$\frac{dT_f}{dx} = \frac{2\pi R_f h_f}{\dot{m}_f c_f} \frac{k\delta m \frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}}{\pi R_f h_f + k\delta m \frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}} [-T_f + (T_a + \theta_R)]$$

$$\frac{d\theta_f}{dx} + \frac{\theta_f}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\dot{q}''_R}{2h} \ , \ \frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi R_f h_f}{\dot{m}_f c_f} \frac{k\delta m \frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}}{\pi R_f h_f + k\delta m \frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}}$$

$$x = 0, \ \theta_f = \theta_{f0}$$

$$\theta_f = (\theta_{f0} - \theta_R) e^{-\frac{x}{\lambda}} + \theta_R$$

$$x = w, \ \theta_{fL} = (\theta_{f0} - \theta_R) e^{-\frac{w}{\lambda}} + \theta_R$$

$$\theta_{fL} - \theta_{f0} = (\theta_R - \theta_{f0})(1 - e^{-\frac{w}{\lambda}})$$

$$\dot{Q}_f = \dot{m}_f c_f (\theta_{fL} - \theta_{f0}) = \dot{m}_f c_f (\theta_R - \theta_{f0})(1 - e^{-\frac{w}{\lambda}})$$

$$\dot{Q}_R = \dot{q}''_R 2wL$$

$$\eta = \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_R} = \frac{\dot{m}_f c_f}{\dot{q}''_R 2wL} (\theta_R - \theta_{f0})(1 - e^{-\frac{w}{\lambda}}) = \frac{\dot{m}_f c_f}{2hwL} (1 - \frac{\theta_{f0}}{\theta_R})(1 - e^{-\frac{w}{\lambda}})$$

例，台中地區夏天日照強度為 700 W/m^2。請計算太陽能吸收板效率及所能達到的最高溫度。

k=200 W/m-°C，δ=1mm，h = 30 W/m^2-°C，Ta = 30°C，L=2 cm，w=2m

d=0.5cm，u=0.5 m/sec，h_f=200W/m^2-°C，T_{f0}=30°C

熱水統的加熱過程

$$M_f c_f \frac{d\theta}{dt} = \dot{m}_f c_f (\theta_{fL} - \theta_{f0})$$

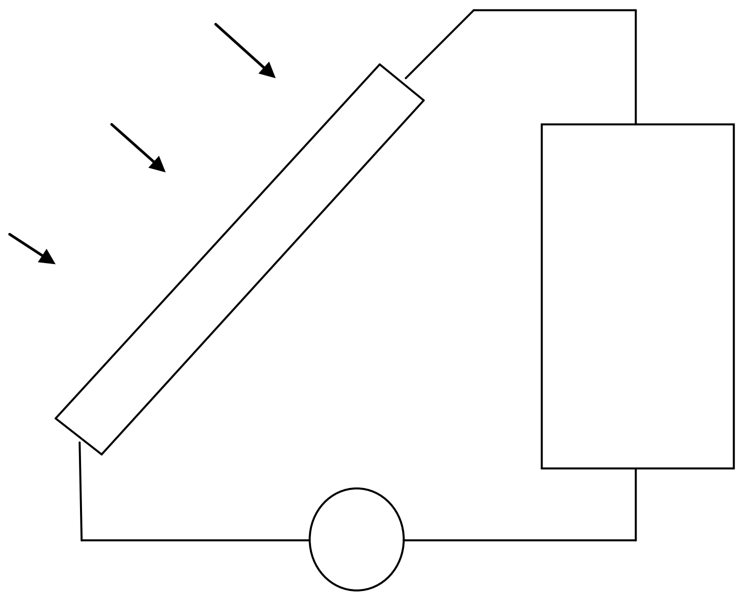
$$\theta = \theta_{f0}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{m}_f}{M_f}(\theta_R - \theta)(1 - e^{-\frac{w}{\lambda}}) = \frac{1}{\tau_f}(\theta_R - \theta)$$

$$\frac{1}{\tau_f} = \frac{\dot{m}_f}{M_f}(1 - e^{-\frac{w}{\lambda}})$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\tau_f}(\theta - \theta_R) = 0$$

$$\frac{\theta - \theta_R}{\theta_0 - \theta_R} = e^{-\frac{t}{\tau_f}}$$



例，台中地區夏天日照強度為 700 W/m^2。有一太陽能吸收板，共有 20 片吸收片。儲水桶內有 100L 的冷水，水溫 30℃。水泵流量 10L/min，請計算一小

時後水溫。

k=200 W/m-°C，δ=1mm，h = 15 W/m^2-°C，Ta = 30℃，L=2 cm，w=2m

d=0.5cm，u=0.5 m/sec，h_f=200W/m^2-°C

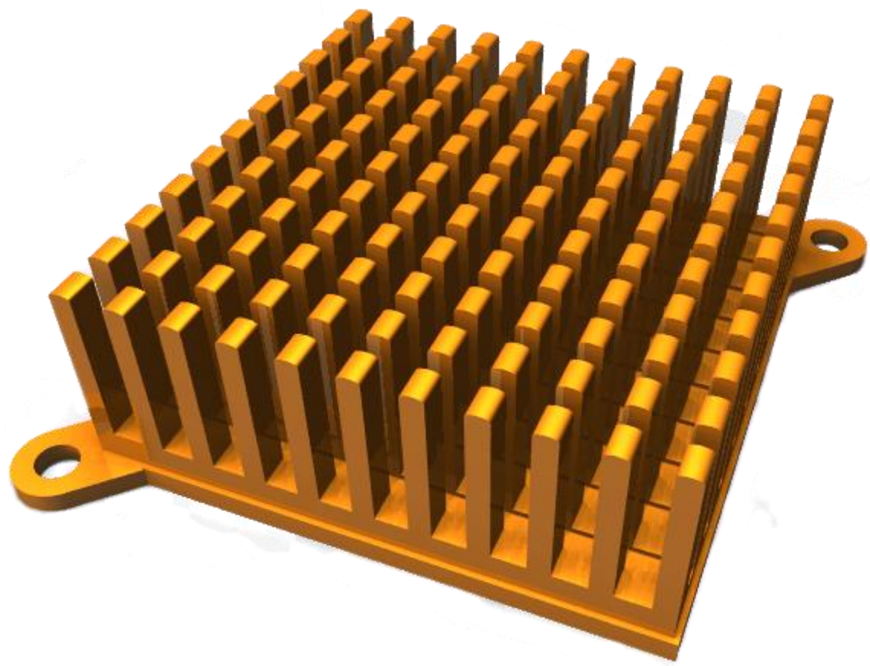
作業 4.13 台中市夏天的日照強度與大氣溫度如下表所示，，請計算上題的系統從上午八點開始，到下午四點時，儲水桶內的水溫。

k=200 W/m-°C，δ=1mm，h = 15 W/m^2-°C，L=2 cm，w=2m，h_f=200W/m^2-°C

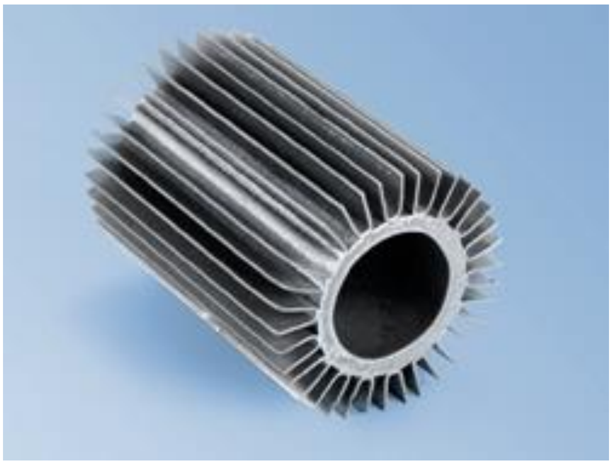
	日照強度	大氣溫度		日照強度	大氣溫度
8:00~9:00	400 W/m^2	27℃	12:00~13:00	1000 W/m^2	35℃
9:00~10:00	600 W/m^2	29℃	13:00~14:00	900 W/m^2	35℃
10:00~11:00	800 W/m^2	31℃	14:00~15:00	700 W/m^2	33℃
11:00~12:00	1000 W/m^2	33℃	15:00~16:00	500 W/m^2	31℃

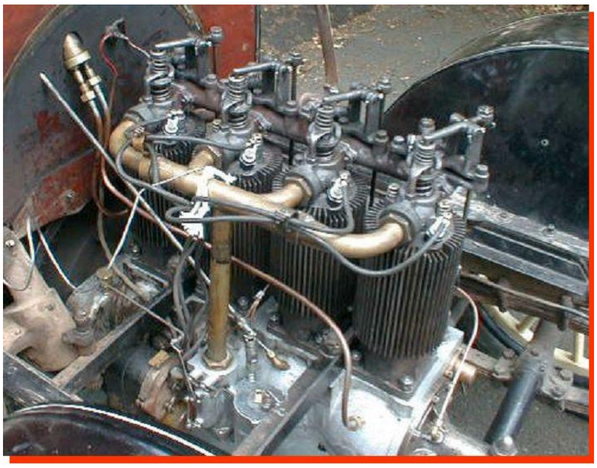
(五). 散熱鰭片模組設計

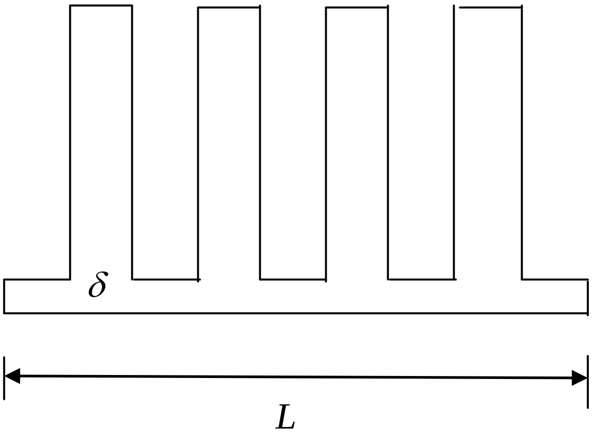
單一散熱鰭片的效果有限，必須以模組方式來散熱，才能有效控制溫度。



(5.1). 外平板鰭片







單片的效益：

$$\varepsilon = \lambda \cdot \frac{1-\frac{\lambda-1}{\lambda+1}e^{-2ml}}{1+\frac{\lambda-1}{\lambda+1}e^{-2ml}} \text{ ，} \lambda = \frac{km}{h} = \frac{k}{h}\cdot\sqrt{\frac{2h}{kb}}$$

整體的效益：

$$\varepsilon_{eff} = \frac{L-n\delta+n\delta\varepsilon}{L} = 1+\frac{n\delta(\varepsilon-1)}{L} = 1+f(\varepsilon-1)$$

其中 L ：整片鰭片基座長度

n ：鰭片數

δ ：單一鰭片厚度

$f=\dfrac{n\delta}{L}$：鰭片覆蓋的面積比例

單片的效益很高，但整體的效益就不一定很高。

整個散熱模組的熱傳量

$$\dot{q}''=\frac{T_{\max}-T_a}{R}$$

$$R=\sum\frac{\delta_i}{k_i}+\frac{1}{h\varepsilon_{eff}}$$

$$T_{\max}=T_a+\dot{q}''\cdot\left[\sum\frac{\delta_i}{k_i}+\frac{1}{h\varepsilon_{eff}}\right]$$

例、散熱鰭片規格如下：

底部面積 A_b= 4cm×4cm，形式: plate type

厚度 b= 1 mm，長度 L= 2 cm，寬度 w= 4 cm，間距 s= 3 mm，

數目 n= 10，k= 200 W/m-K，h= 35 W/m^2-℃，大氣溫度 Ta = 25℃

(1). 請計算單一散熱鰭片的效益 ε_f (38.23)

(2). 請計算整個散熱鰭片組的效益(10.3)

(3). 若散熱鰭片需散熱 20W，請計算散熱鰭片底部溫度。(59.6℃)

例、散熱鰭片規格如下：

底部面積 A_b= 4cm×4cm，形式: plate type

厚度 b= 1 mm，長度 L= 2 cm，寬度 w= 4 cm，間距 s= 3 mm，

數目 n= 10，k= 200 W/m-K，風速 u= 1 m/sec，大氣溫度 Ta = 25℃

$d_h=2s$: hydraulic diameter

$Gz = \mathrm{Re}\cdot \mathrm{Pr}\cdot \frac{d_h}{L}$, Graetz number

$$Nu = 7.54 + \frac{0.0289 \cdot Gz^{1.37}}{1 + 0.0438 \cdot Gz^{0.87}} = \frac{hd_h}{k}$$

鰭片表面平均溫度：

$$\theta_m = \frac{1}{mL}\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}\theta_b$$

$$\dot{Q} = -hpL\theta_m$$

$$\theta_m = \frac{\theta_i - \theta_e}{\ln\frac{\theta_i}{\theta_e}}$$

(1). 請計算散熱鰭片的熱傳係數 h

(2). 請計算單一散熱鰭片的效益 ε_f

(3). 請計算整個散熱鰭片組的效益

(4). 若散熱鰭片需散熱 20W，請計算散熱鰭片底部溫度。

先猜熱傳係數 h

計算散熱鰭片的模數 $m = \sqrt{\frac{2h}{k\delta}}$

計算散單片熱鰭片的效益 $\varepsilon = \frac{km}{h}\frac{1-e^{-2mL}}{1+e^{-2mL}}$

計算散整組熱鰭片的效益 $\varepsilon_{eff} = 1 + f(\varepsilon - 1)$

計算溫差 $Q = hA\varepsilon_{eff}\theta_m = hA\varepsilon_{eff}(T_{fm} - T_{am})$

$\theta_m = T_{fm} - T_{am} = \frac{Q}{hA\varepsilon_{eff}}$，其中 T_{fm} 為鰭片平均溫度，T_{am} 為空氣平均溫度。

$$Q = \dot{m}_a c_p (T_{ae} - T_{ai}) = \rho_a (2L + s) Wnuc_p (T_{ae} - T_{ai})$$

$$\dot{m}_a = \rho_a(2L+s)Wnu$$

$$T_{ae} = \frac{Q}{\dot{m}_a c_p} + T_{ai}$$

$$\theta_m = T_{am} - T_{fm} = \frac{T_{ai} - T_{ae}}{\ln \dfrac{T_{ai} - T_{fm}}{T_{ae} - T_{fm}}}$$

$$\ln \frac{T_{ai} - T_{fm}}{T_{ae} - T_{fm}} = \frac{T_{ai} - T_{ae}}{T_{am} - T_{fm}}$$

$\dfrac{T_{ai} - T_{fm}}{T_{ae} - T_{fm}} = e^{\frac{T_{ai} - T_{ae}}{T_{am} - T_{fm}}}$，可獲得$T_{fm}$

$T_{am} = T_{fm} - \theta_m$，可獲得$T_{am}$

$$\theta_m = \frac{1}{mL} \frac{1 - e^{-2mL}}{1 + e^{-2mL}} \theta_b$$

$$\theta_b = T_b - T_{am} = mL \frac{1 + e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}} (T_{fm} - T_{am})$$

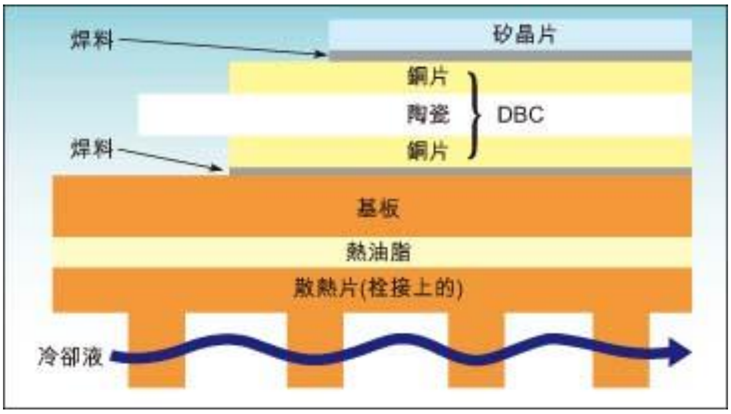
$T_b = T_{am} + mL \dfrac{1 + e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}} (T_{fm} - T_{am})$，可獲得散熱鰭片底部溫度。

再利用T_{am}計算空氣的性質，重新計算熱傳係數h

$Gz = \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr} \cdot \dfrac{d_h}{L}$, Graetz number

$$Nu = 7.54 + \frac{0.0289 \cdot Gz^{1.37}}{1 + 0.0438 \cdot Gz^{0.87}} = \frac{hd_h}{k}$$

例，有一 20 W 的晶片，長寬均為 4 cm，安裝在上述的鰭片座上。已知晶片內部如下圖所示。



鋁板：k=200 W/m-℃，δ=5 mm

銅板：k=390 W/m-℃，δ=1 mm

陶瓷：k=5 W/m-℃，δ=1 mm

膠模：k=3 W/m-℃，δ=5 mm

請計算晶片內部最高溫度。

例，有一具氣冷式的機車引擎，以鑄鐵鰭片散熱。已知氣缸直徑 8 cm，高度 15 cm，氣缸外壁共有 10 片散熱鰭片，每片直徑 20 cm，高度 5 cm，厚度 5 mm。引擎的發熱功率為 4 kW，機車速度為 50 km/hr，請計算氣缸內壁溫度。大氣溫度 Ta = 25℃。

例，有一圓管，內徑 5cm，外徑 6cm，長度 10m，在內壁上沿著軸向共鑲有 16 片板狀鰭片，每一片厚度 2mm，長度 10m，高度 1cm。入口為 100℃的熱空氣，流速 1 m/sec，管外為 25℃的冷水垂直流過，流速 0.1 m/sec，請計算出口空氣溫度。

作業 4.14

有一 5cm×5cm 的平面熱源，發熱量為 50W，擬用柱狀鰭片來散熱。共有 7×7

排圓柱，每一圓柱直徑 5mm，高度 3cm。已知 k=200 W/m-℃，風速 u= 1 m/sec，大氣溫度為 25℃。圓柱的熱傳系數

$$Nu = C\,\mathrm{Pr}^{0.33}\,\mathrm{Re}_d^n$$

Re	C	n
0.4~4	0.989	0.330
4~40	0.911	0.385
40~4000	0.683	0.466
4000~40000	0.193	0.618
40000~400000	0.0266	0.805

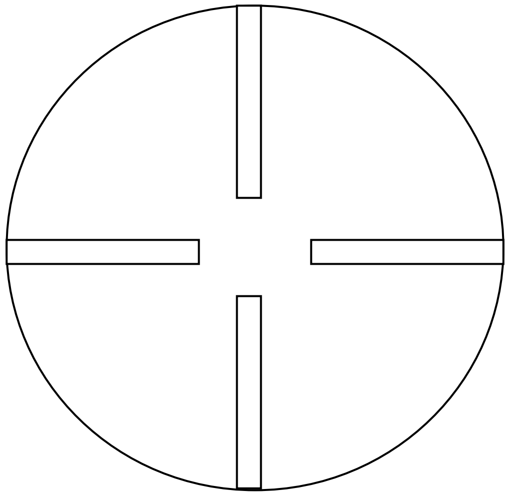
作業 4.15

有一 5cm×5cm 的平面熱源，發熱量為 50W，擬用板狀鰭片來散熱。共有 7 片平板，每一片厚度 2mm，寬度 5cm，長度 3cm。已知 k=200 W/m-℃，風速 u= 1 m/sec，平板與大氣之間的熱傳系數為

$$Nu = 7.54 + \frac{0.0289 \cdot Gz^{1.37}}{1 + 0.0438 \cdot Gz^{0.87}} = \frac{hd_h}{k}$$

大氣溫度為 25℃。請計算平面熱源的表面溫度。

(5.2). 內平板鰭片



單片的效益：

$$\varepsilon = \lambda \cdot \frac{1 - \dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1} e^{-2ml}}{1 + \dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1} e^{-2ml}} \text{ ， } \lambda = \frac{km}{h} = \frac{k}{h} \cdot \sqrt{\frac{2h}{kb}}$$

整體的效益：

$$\varepsilon_i = \frac{2\pi r - nb + nb\varepsilon}{2\pi r} = 1 + \frac{nb(\varepsilon - 1)}{2\pi r} = 1 + f(\varepsilon - 1)$$

$$\dot{m}c \frac{dT}{dx} = hp\varepsilon_i (T_w - T)$$

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{hp\varepsilon_i}{\dot{m}c}\theta = 0 \text{ ， } \theta = T - T_w$$

$$\theta = \theta_i e^{-\frac{x}{\lambda}\varepsilon_i}$$

$$\theta_e = \theta_i e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}$$

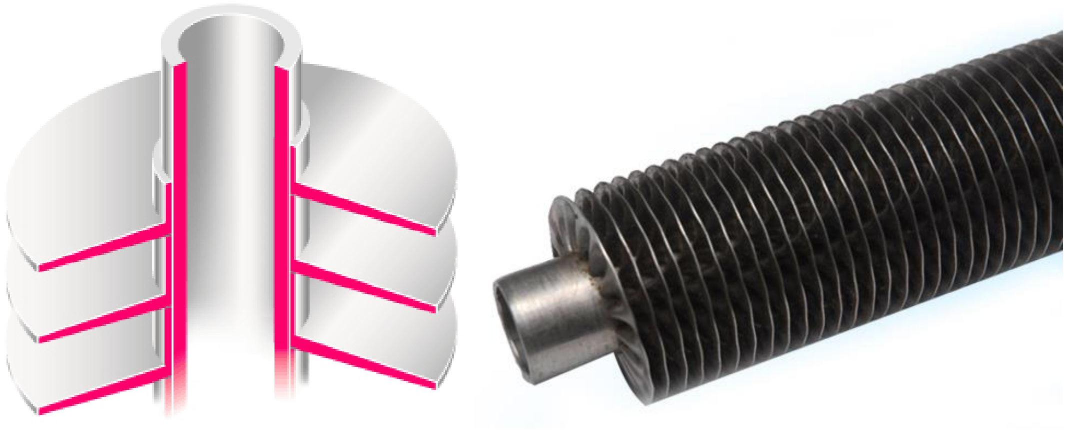
$$\dot{Q} = \dot{m}c(T_e - T_i) = \dot{m}c(T_w - T_i)\left(1 - e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}\right)$$

$\boxed{例}$，有一個空氣冷卻器，內徑 5 cm，長度 1m，內部有 8 片銅製平板鰭片，厚度 1mm，高度 2cm，已知 h_i=200 W/m-℃，入口空氣溫度 200℃，速度 5 m/sec，管壁外徑 5.6 cm，以 25℃的水冷卻，h_o=50 W/m-℃，請計算出口溫度。

作業 4.16

有一個空氣冷卻器，內徑 5 cm，長度 1m，內部有 16 片銅製平板鰭片，厚度 1mm，高度 2cm，已知 h_i=200 W/m-℃，入口空氣溫度 200℃，速度 5 m/sec，管壁外徑 5.6 cm，以 25℃的水冷卻，h_o=50 W/m-℃，請計算出口溫度。

(5.3). 外環狀鰭片



單片的效益：

$$\varepsilon = \frac{km}{h}\frac{I_1(mr_1)K_1(mr_0)-K_1(mr_1)I_1(mr_0)}{I_1(mr_1)K_0(mr_0)+K_1(mr_1)I_0(mr_0)}$$

整體的效益：

$$\varepsilon_o = \frac{L-n\delta+n\delta\varepsilon}{L} = 1+\frac{n\delta(\varepsilon-1)}{L} = 1+f(\varepsilon-1)$$

$\dot{Q} = h_o A_o \varepsilon_o \left(T_o - T_w\right)$ ， $A_o = L2\pi r_1$

內平板外環狀翼片空氣冷卻管

$$\dot{Q} = \dot{m}c(T_w - T_i)\left(1-e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}\right) = h_o A_o \varepsilon_o \left(T_o - T_w\right)$$

$$T_w\left[\dot{m}c\left(1-e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}\right)+h_o A_o \varepsilon_o\right] = \dot{m}cT_i\left(1-e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i}\right)+h_o A_o \varepsilon_o T_o$$

$$T_w = \frac{\dot{m}cT_i(1-e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i})+h_o A_o \varepsilon_o T_o}{\dot{m}c(1-e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i})+h_o A_o \varepsilon_o}$$

$$\dot{Q} = \frac{h_o A_o \varepsilon_o \dot{m}c_i(1-e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i})}{\dot{m}c(1-e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i})+h_o A_o \varepsilon_o}(T_o - T_i) = \frac{T_o - T_i}{R}$$

$$R=\frac{\dot{m}c(1-e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i})+h_oA_o\varepsilon_o}{h_oA_o\varepsilon_o\dot{m}c_i(1-e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i})}=\frac{1}{h_oA_o\varepsilon_o}+\frac{1}{\dot{m}c_i(1-e^{-\frac{L}{\lambda}\varepsilon_i})}$$

例，有一個空氣冷卻器，內徑 5 cm，長度 1m，內部有 8 片銅製平板鰭片，厚度 1mm，高度 2cm，已知 h_i=200 W/m-℃，入口空氣溫度 200℃，速度 5 m/sec，管壁外徑 5.6 cm，上面共有以 10 片銅製環狀鰭片，厚度 2mm，高度 5cm，今以 25℃的水冷卻，h_o=50 W/m-℃，請計算出口溫度。

作業 4.17

有一個空氣冷卻器，內徑 5 cm，長度 2m，內部有 16 片銅製平板鰭片，厚度 1mm，高度 2cm，已知 h_i=200 W/m-℃，入口空氣溫度 200℃，速度 5 m/sec，管壁外徑 5.6 cm，上面共有以 40 片銅製環狀鰭片，厚度 2mm，高度 5cm，今以 25℃的水冷卻，h_o=50 W/m-℃，請計算出口溫度。

(六). 級聯鰭片組(cascade fin array)

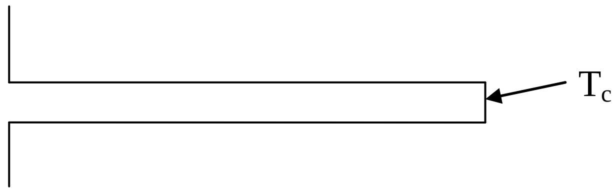
(6.1). 單一鰭片熱傳量

已知鰭片兩端溫度

$$\dot{Q}_b = \frac{kmwb}{e^{mL} - e^{-mL}} \left[\theta_b \left(e^{mL} + e^{-mL} \right) - 2\theta_c \right] = X_0 \theta_b - Y_0 \theta_c$$

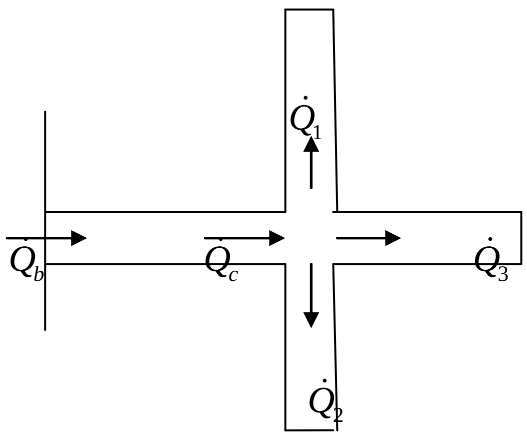
$$\dot{Q}_c = \frac{kmwb}{e^{mL} - e^{-mL}} \left[2\theta_b - \theta_c \left(e^{mL} + e^{-mL} \right) \right] = Y_0 \theta_b - X_0 \theta_c$$

$$Y_0 = kmwb \frac{2e^{-mL}}{1 - e^{-2mL}}, \quad X_0 = kmwb \frac{1 + e^{-2mL}}{1 - e^{-2mL}}$$



$\boxed{例}$，有一方柱鰭片，已知 L=10 cm，h=20 W/m^2-℃，k=390 W/m-℃，b=1cm，T_a=25℃ ，T_b=100℃ ，T_e=50℃ ，請計算熱傳量。

(7.2). 一組鰭片熱傳量



交會點溫度為 T_c，由交會點伸出的每一隻鰭片的熱傳量為

$$\dot{Q}_1 = kb_1 w_1 m_1 \theta_c \frac{1-e^{-2m_1L_1}}{1+e^{-2m_1L_1}} = Z_1\theta_c, \quad Z_1 = kb_1 w_1 m_1 \frac{1-e^{-2m_1L_1}}{1+e^{-2m_1L_1}}$$

$$\dot{Q}_2 = kb_2 w_2 m_2 \theta_c \frac{1-e^{-2m_2L_2}}{1+e^{-2m_2L_2}} = Z_2\theta_c$$

$$\dot{Q}_3 = kb_3 w_3 m_3 \theta_c \frac{1-e^{-2m_3L_3}}{1+e^{-2m_3L_3}} = Z_3\theta_c$$

$$\dot{Q}_c = Y_0\theta_b - X_0\theta_c$$

$$\dot{Q}_b = X_0\theta_b - Y_0\theta_c$$

交會點的能量平衡為

$$\dot{Q}_c = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3$$

$$Y_0\theta_b - X_0\theta_c = Z_1\theta_c + Z_2\theta_c + Z_3\theta_c$$

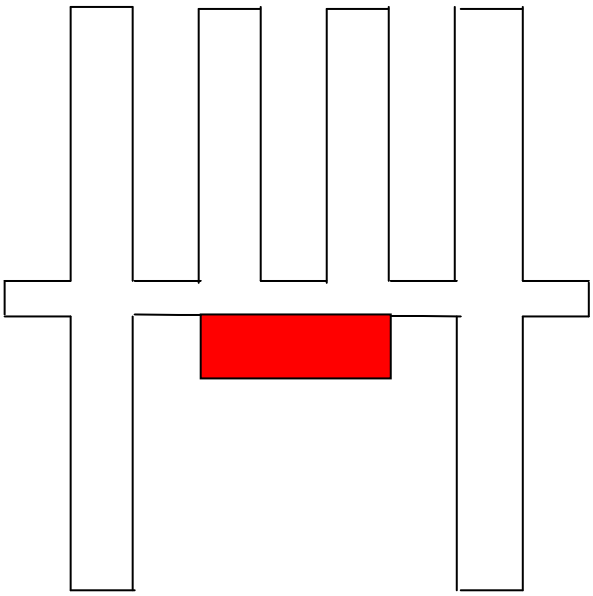
$$\theta_c = \frac{Y_0\theta_b}{X_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

全部鰭片的熱傳量為

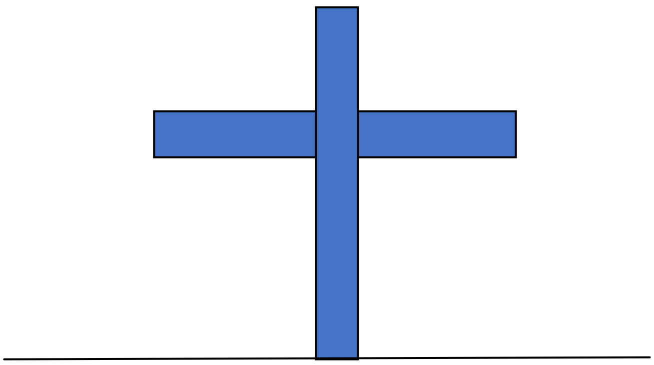
$$\dot{Q}_b = X_0\theta_b - Y_0\theta_c = \left(X_0 - \frac{Y_0^2}{X_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3} \right)\theta_b$$

例，有一組方柱鰭片，共有四段。已知每一段的尺寸皆相同，L=10 cm，h=20 W/m^2-℃，k=390 W/m-℃，b=1cm，T_a=25℃，T_b=100℃，請計算熱傳量與效益。(14.60W，97.3)

$\boxed{\text{例}}$，有一組晶片的平板鰭片，共有六段。每一段的尺寸皆相同，L=3 cm，h=20 W/m^2-℃，k=200 W/m-℃，b=1mm，T_a=25℃，w=2 cm，d=1 cm。已知晶片發熱量為 10W，請計算晶片表面溫度。

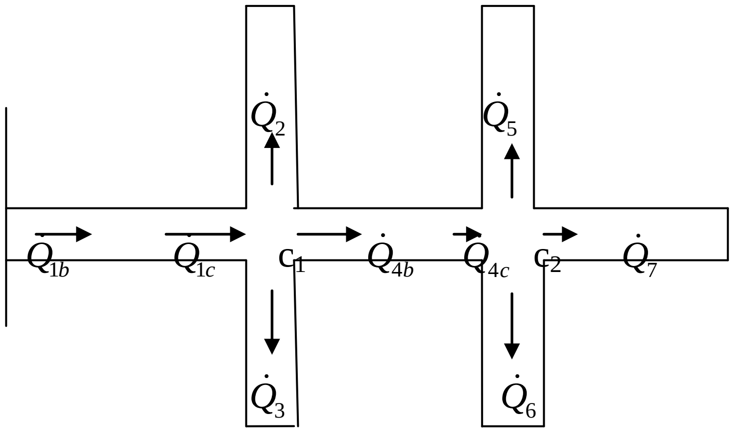


作業 4.11，有一組方柱鰭片，共有六段。已知各段長度不同，分別為底部 L=10 cm，頂部 L=5 cm，前後左右則都是 L=7 cm。其他條件則相同，h=20 W/m^2-℃，k=390 W/m-℃，b=1cm，T_a=25℃，T_b=100℃，請計算熱傳量與效益。



(7.3). 兩組鰭片熱傳量

共有七片鰭片 ，兩個交會點



第二個交會點(c_2)：

$$\dot{Q}_{4c} = \dot{Q}_5 + \dot{Q}_6 + \dot{Q}_7$$

$$Y_4\theta_{c1} - X_4\theta_{c2} = Z_5\theta_{c2} + Z_6\theta_{c2} + Z_7\theta_{c2}$$

$$Y_4\theta_{c1} - (X_4 + Z_5 + Z_6 + Z_7)\theta_{c2} = 0$$

第一個交會點(c_2)：

$$\dot{Q}_{1c} = \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 + \dot{Q}_{4b}$$

$$Y_1\theta_b - X_1\theta_{c1} = Z_2\theta_{c1} + Z_3\theta_{c1} + X_4\theta_{c1} - Y_4\theta_{c2}$$

$$(X_1 + Z_2 + Z_3 + X_4)\theta_{c1} - Y_4\theta_{c2} = Y_1\theta_b$$

將方程式聯立，可得

$$\begin{pmatrix} X_1 + Z_2 + Z_3 + X_4 & -Y_4 \\ Y_4 & -(X_4 + Z_5 + Z_6 + Z_7) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{c1} \\ \theta_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y\theta_b \\ 0 \end{pmatrix}$$

其解為

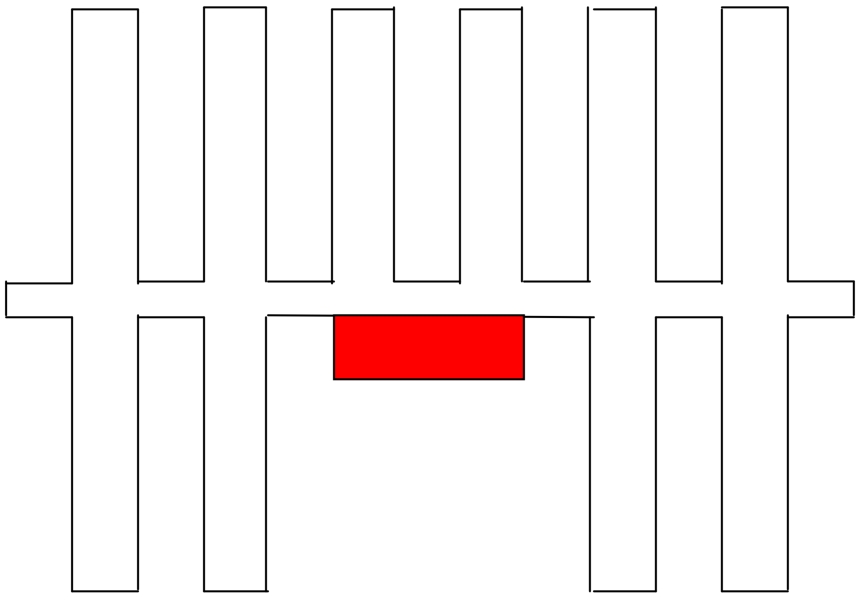
$$\begin{pmatrix} \theta_{c1} \\ \theta_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + Z_2 + Z_3 + X_4 & -Y_4 \\ Y_4 & -(X_4 + Z_5 + Z_6 + Z_7) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y\theta_b \\ 0 \end{pmatrix}$$

基部熱傳

$$\dot{Q}_{1b} = X_1\theta_b - Y_1\theta_{c1}$$

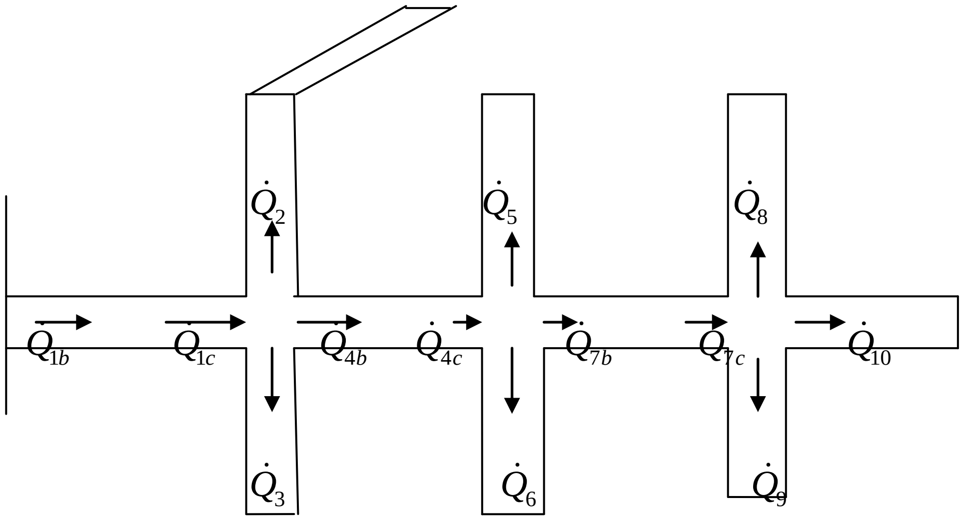
$\boxed{例}$，有一組方柱鰭片，共有七段。已知各段長度不同，分別為底部 L=10 cm，頂部 L=5 cm，前後左右則都是 L=7 cm。其他條件則相同，h=20 W/m^2-℃，k=390 W/m-℃，b=1cm，T_a=25℃，T_b=100℃，請計算熱傳量與效益。

$\boxed{例}$，有一組晶片的平板鰭片，共有十段。每一段的尺寸皆相同，L=3 cm，h=20 W/m^2-℃，k=200 W/m-℃，b=1mm，T_a=25℃，w=2 cm，d=1 cm。已知晶片發熱量為 10W，請計算晶片表面溫度。



(7.4). 多組鰭片熱傳量

共有共有十片鰭片，三個交會點



第三個交會點(c_3)：

$$\dot{Q}_{7c} = \dot{Q}_8 + \dot{Q}_9 + \dot{Q}_{10}$$

$$Y_7\theta_{c2} - X_7\theta_{c3} = Z_8\theta_{c3} + Z_9\theta_{c3} + Z_{10}\theta_{c3}$$

$$Y_7\theta_{c2} - (X_7 + Z_8 + Z_9 + Z_{10})\theta_{c3} = 0$$

第二個交會點(c_2)：

$$\dot{Q}_{4c} = \dot{Q}_5 + \dot{Q}_6 + \dot{Q}_{7b}$$

$$Y_4\theta_{c1} - X_4\theta_{c2} = Z_5\theta_{c2} + Z_6\theta_{c2} + X_7\theta_{c2} - Y_7\theta_{c2}$$

$$Y_4\theta_{c1} - (X_4 + Z_5 + Z_6 + Z_7)\theta_{c2} + Y_7\theta_{c3} = 0$$

第一個交會點(c_1)：

$$\dot{Q}_{1c} = \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 + \dot{Q}_{4b}$$

$$Y_1\theta_b - X_1\theta_{c1} = Z_2\theta_{c1} + Z_3\theta_{c1} + X_4\theta_{c1} - Y_4\theta_{c2}$$

$$(X_1 + Z_2 + Z_3 + X_4)\theta_{c1} - Y_4\theta_{c2} = Y_1\theta_b$$

將方程式聯立，可得

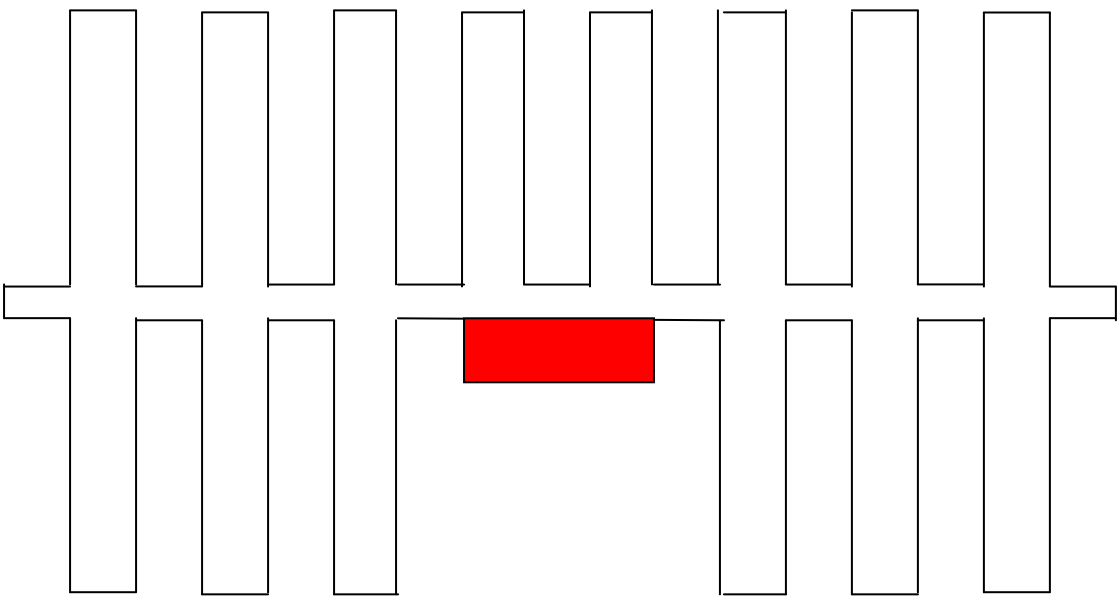
$$\begin{pmatrix} X_1+Z_2+Z_3+X_4 & -Y_4 & 0 \\ Y_4 & -(X_4+Z_5+Z_6+Z_7) & Y_7 \\ 0 & Y_7 & -(X_7+Z_8+Z_9+Z_{10}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{c1} \\ \theta_{c2} \\ \theta_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y\theta_b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_{c1} \\ \theta_{c2} \\ \theta_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1+Z_2+Z_3+X_4 & -Y_4 & 0 \\ Y_4 & -(X_4+Z_5+Z_6+Z_7) & Y_7 \\ 0 & Y_7 & -(X_7+Z_8+Z_9+Z_{10}) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y\theta_b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基部熱傳

$$\dot{Q}_{1b} = X_1\theta_b - Y_1\theta_{c1}$$

例，有一組晶片的平板鰭片，共有十四段。每一段的尺寸皆相同，L=3 cm，h=20 W/m^2-℃，k=200 W/m-℃，b=1mm，T_a=25℃，w=2 cm，d=1 cm。已知晶片發熱量為 10W，請計算晶片表面溫度。



$\boxed{\text{例}}$，有一組方柱鰭片，共有十段。已知各段長度不同，分別為底部 L=10 cm，頂部 L=5 cm，前後左右則都是 L=7 cm。其他條件則相同，$h=20\ W/m^2$-℃，k=390 W/m-℃，b=1cm，$T_a=25$℃，$T_b=100$℃，請計算熱傳量與效益。
